

MATLAB

Guía Introductoria

PROFESORADO Y LIC. EN MATEMÁTICA

El nombre MATLAB proviene de la contracción de MATrix LABoratory. Es un sistema de trabajo interactivo y una herramienta importante para cualquier tarea que requiera cálculos matriciales, ya sea que involucren ecuaciones, sistemas característicos, mínimos cuadrados, etc. y la visualización gráfica de los mismos. Se pueden resolver problemas numéricos relativamente complejos sin necesidad de escribir un programa para ello. Una de las capacidades más atractivas es la de realizar una amplia variedad de **gráficos** en dos y tres dimensiones

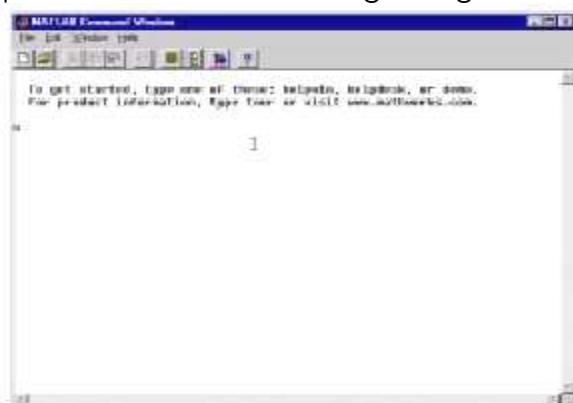
Tiene gran capacidad de expansión ya que permite que el usuario defina sus propias funciones, es por ello que es considerado como un *lenguaje de programación* para cálculos técnicos y científicos donde se encuentran implicados elevados cálculos matemáticos y la visualización gráfica.

MATLAB trabaja esencialmente con un solo tipo de objetos: matrices, con entradas eventualmente complejas. Esto significa que todas las variables representan matrices, de este modo los escalares quedan caracterizados por matrices 1x1 y los vectores, por matrices de una fila o una columna.

Es importante destacar que el alcance y la potencia de MATLAB van más allá de lo que pueda verse en esta serie de trabajos prácticos

Ingresando a MATLAB

Para trabajar con MATLAB se comienza como con cualquier otra aplicación de **Windows**, haciendo doble clic en el ícono correspondiente. Al arrancar MATLAB se abre una ventana del tipo de la indicada en la figura siguiente.



La ventana inicial, denominada **ventana de orden**, es el lugar donde se interacciona con MATLAB. En dicha ventana aparece el **prompt** característico de MATLAB (») que es el indicativo de petición de órdenes.

Cuando la ventana de orden está activa aparece un **cursor** a la derecha del **prompt**, esto significa que MATLAB está esperando para responder a una pregunta matemática.

Operaciones aritméticas básicas

MATLAB realiza las siguientes operaciones aritméticas básicas:

Operación	Símbolo
Suma	+
Resta	-
Multiplicación	*
División	/
Potencia	^

Toda expresión es evaluada respetando las reglas usuales de precedencia: potencia, multiplicación y división y finalmente suma y resta, como así también la ubicación de los paréntesis dentro de la expresión.

Ejemplo :

Para calcular $a = 2 \cdot \left(5 - \frac{3^2}{4} \right) + (-2^{-3})$ se tipea:

`>> a=2*(5-3^2/4)+(-2)^(-3)`

y al oprimir la tecla **Enter** se observa en la pantalla:

a =
5.3750

Actividades:

Realice las siguientes operaciones con MATLAB y verifique las respuestas.

a) $\frac{5 - (1/2)^2}{0,7 + 1}$ Rta.: 2,7941

b) $(1 - 0,25)^{1/2} + (4/81)^{-1/2}$ Rta.: 5,3660

c) $\sqrt{\sqrt{256} - \sqrt{(1/25)^{-2}}$ Rta.: 0 + 3i (**Nota:** sqrt(x) calcula la raíz cuadrada de x)

d) $\frac{(5-i)^2}{3i} + \sqrt{2-i}$ Rta.: -1.8780 - 8.3436i

Variables

En MATLAB como en cualquier otro lenguaje de programación, y/o asistente matemático se utilizan variables

Una **variable** es un nombre que se da a una entidad numérica, que puede ser una matriz, un vector o un escalar. El valor de esa variable, e incluso el tipo de entidad numérica que representa, puede cambiar a lo largo de una sesión de MATLAB o a lo largo de la ejecución de un programa. La forma más normal de cambiar el valor de una variable es colocándola a la izquierda del **operador de asignación** (=).

$$\text{variable} = \text{expresión}$$

Las variables deben tener un nombre según ciertas reglas. Estas reglas son:

- ❖ MATLAB distingue minúsculas de mayúsculas, esto quiere decir que **A** y **a** representan variables diferentes.
- ❖ Las variables pueden contener hasta 19 caracteres y comenzar por una letra seguida de cualquier número de letras, dígitos o guiones de subrayado
Ejemplo: suma, A, S3, CIRCULO, valor_propio, etc.
- ❖ Los nombres de variables no pueden contener operadores ni puntos. (No es válido usar /, *, -, +, ...)

MATLAB cuenta con variables especiales, algunas de ellas son:

- **ans** (de answer – respuesta-) es la variable que MATLAB crea automáticamente cuando hay una expresión a la que no se le asignó nombre de variable.

Ejemplo: » $2*5+1.5$ da como respuesta:

```
ans =
    11.5000
```

- **pi**: Razón de una circunferencia y su diámetro
- **inf**: Infinito. Por ejemplo:


```
» a=1/0
Warning: Divide by zero.
a =
    Inf
```
- **NaN**: Magnitud no numérica. Por ejemplo:


```
» b=0/0
Warning: Divide by zero.
```

b =
NaN

i y j : Se emplean para introducir números complejos. Es decir: $i = j = \sqrt{-1}$

Nota: los números complejos se introducen siguiendo el convenio usual, vale decir que $z_1 = 2 + 3i$, se introduce como:
>> z1=2+3i

Ordenes de Propósito General

Para recordar información: para poder visualizar cuales variables han sido ya introducidas se tecléa **who**

Para conocer el contenido de una variable: simplemente se tipea su nombre y se oprime "enter".

Uso de flechas: Al emplear la flecha \uparrow se desplazarán los comandos anteriores. Se pueden utilizar las flechas \uparrow , \downarrow , \leftarrow , \rightarrow para localizar un comando y modificarlo y al oprimir la tecla "enter" se ejecuta el comando modificado.

Comentarios: Si se inicia una línea con el símbolo %, MATLAB interpretará como un comentario.

Por ejemplo: % Este es un comentario

Supresión de vista en pantalla: Si se escribe una instrucción de MATLAB y no se desea ver los resultados desplegados, se finaliza el comando con un ; (punto y coma). Esto es esencial para evitar pérdidas de tiempo al mostrar los resultados intermedios.

Help: Si tecléa help seguido de un comando, función o archivo de MATLAB, aparecerá una descripción del comando.

Por ejemplo: **help** : dará información sobre como puede usar " : " en MATLAB
help rref dará información sobre el comando rref.

Por otra parte MATLAB cuenta con otras posibilidades para el uso del **Help**. La figura muestra las distintas opciones que aparecen en el menú **Help**.



1. **Help Window**, Abre una ventana en la que se puede obtener ayuda sobre la función o el concepto que se desee.
2. **Help Tips**. Brinda ideas útiles para utilizar la ayuda.
3. **Help Desk**. Proporciona información sobre MATLAB en formato HTML. Es un equivalente a los manuales impresos del programa.
4. **Examples and Demos**. Abre una ventana que muestra ejemplos resueltos con MATLAB, cuyos resultados se presentan en forma gráfica.

Si se escribe **doc** seguido del nombre de un comando muestra la información correspondiente a ese comando a través de **Netscape Navigator** o **Internet Explorer**, en formato HTML.

Ejemplo: doc rref

ARCHIVOS –M

MATLAB puede ejecutar una sucesión de instrucciones almacenadas en archivos de disco. Estos archivos se denominan **archivos-M** debido a que su extensión deber ser m.

❖ Archivos-M de comandos

Cuando el número de órdenes a ejecutar aumenta o cuando se desea cambiar el valor de una o más variables y reevaluar una serie de instrucciones, MATLAB permite escribir y guardar dichas instrucciones en un simple archivo de texto, de tal manera que si se lo invoca desde la ventana de órdenes es ejecutado línea por línea como si hubiesen sido escritas en las líneas de la ventana de ordenes.

Para elaborar un archivo-M de comando se hace click en **New** del menú **File** y se selecciona **M-file**. Aparecerá una nueva ventana para la edición de texto donde se teclaea la lista de instrucciones de MATLAB. Para guardarlo como archivo-M en el disco, se hace clic en **Save as** del menú **File del editor** y se agrega al nombre del archivo la extensión m.

Escribiendo simplemente el nombre del archivo (sin la extensión m) en la línea de orden de MATLAB, se ejecutarán las órdenes contenidas en el archivo.

Para que aparezcan los comentarios del archivo en la pantalla de MATLAB, éste debe iniciarse con la orden **echo on**. Para desactivar este comando se usa **echo off**.

Ejemplo: Un archivo-M para calcular el volumen de una esfera

% Volumen de una esfera	Línea de comentario
R = 2.4;	Asigna a la variable r el valor del radio de la esfera
V= (4/3)*pi*r^3;	Calcula el volumen y guarda el resultado en la variable V
disp('El volumen de la esfera es:')	Imprime en pantalla el texto encerrado entre comillas
V	Imprime el valor de V

Si este archivo es guardado con el nombre de esfera.m y luego se lo llama desde la ventana de orden tecleando esfera, se obtiene:

```
El volumen de la esfera es:
V =
57.9058
```

Ejercicios:

- a) Confeccione un archivo–M que calcule el área del triángulo cuya base y altura miden respectivamente 12.34cm y 7.82cm. y guárdelo en el disco
- b) Llámelo desde la ventana de orden para ver que obtiene.
- c) Abra nuevamente el archivo haciendo click en **Open M-file** del menú **file** y luego de seleccionar el nombre del archivo haga click en **Aceptar**. Modifique los valores de la base y altura del triángulo, guarde el archivo modificado y ejecútelo nuevamente desde la ventana de orden de MATLAB.

❖ **Archivos –M de función**

Estos archivos permiten que el usuario pueda definir sus propias funciones. Son similares a los de comandos pues son archivos de texto que tienen una extensión m.

Los archivos-M de función, como los de comando admiten líneas de comentario que comienzan con un % y no son activas al momento de ejecutarse.

La primera línea activa (no comentario) tiene el siguiente formato obligatorio:

$$\mathbf{function}[V1,V2,\dots,Vn]=\mathbf{nombre_archivo}(a1,a2,\dots,ak)$$

donde V1, V2, ...,Vn son las variables de salida y a1, a2,...,ak son los argumentos o variables de entrada, que serán asignadas en el mismo orden al convocar la función.

Cuando se tipea `help nombre_archivo` aparece en pantalla el primer bloque de líneas de comentario del archivo, en el cual usualmente se describe la función `nombre_archivo`.

Ejemplo:

El archivo `esfera.m` del ejemplo anterior puede ser modificado de manera tal que el valor del radio de la esfera pueda ser ingresado directamente desde el teclado.

```
% vol_esf
% vol-esf(r) calcula el volumen de una esfera de radio r
function V=vol_esf(r)
V = (4/3)*pi*r^3;
disp('El volumen de la esfera es:')
```

Notas:

- * Este archivo debe guardarse con el nombre de `vol_esf.m`
- * Las líneas de comentario del archivo de función, constituyen el texto visualizado en respuesta a la orden `help vol_esf`.

Ejercicio 1:

- a) Guarde el archivo `vol_esf` en el disco y desde la ventana de orden de MATLAB escriba `V=vol_esf(5)`.
- b) Halle el volumen para diferentes valores de `r`.

Ejercicio 2

Construya un archivo de función que calcule el valor de la función:

$$f(x) = 2x^3 + 2x^2 + 5x + 1$$

MATLAB

ÁLGEBRA II Guía N° 1

PROFESORADO Y LIC. DE MATEMÁTICA

Matrices

Las matrices son, en esencia, los objetos matemáticos con los que trabaja MATLAB, es decir que todas las variables representan matrices, de modo que, los escalares quedan caracterizados por matrices 1x1 y los vectores por matrices fila o columna.

Para introducir matrices se siguen las siguientes reglas:

- ✓ Los elementos de la matriz van encerrados entre **corchetes**
- ✓ Los elementos de una fila se separan con **coma** o **espacio**
- ✓ Las filas se separan entre sí con **punto y coma**

Ejemplo 1:

La instrucción:

```
» A=[1 0 2.5;3 -1 0]
```

crea la matriz A de 2 filas y 3 columnas:

```
A =  
1.0000    0  2.5000  
3.0000 -1.0000    0
```

El operador dos puntos (:) es uno de los más útiles de MATLAB. Puede crear vectores, servir como subíndice de matrices y especificar iteraciones.

Ejemplo 2:

La instrucción:

```
» v=1:9
```

crea el vector fila:

```
v =  
1 2 3 4 5 6 7 8 9
```

Matrices especiales:

Existen funciones en MATLAB que proporcionan una forma sencilla de crear matrices, algunos ejemplos de ellas son:

eye	Matriz unidad
zeros	Matriz de ceros
ones	Matriz de unos
rand	Matriz de números aleatorios entre 0 y 1
magic	Matriz mágica

Actividades

1 - Introduzca las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0.2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \text{eye}(3) \quad E = \text{ones}(2)$$

2 - Ejecute las siguientes órdenes, describa lo que produce y proponga una generalización:

- a) 2:7 b) 1:2:8 c) 6:3 d) 6:-2:3

Operaciones matriciales básicas

Las operaciones matriciales básicas, definidas por las reglas del álgebra lineal, con las que cuenta MATLAB son:

Operación	Símbolo
Suma	+
Resta	-
Producto	*
División	/ o \
Potencia	^
conjugada transpuesta	'

Ejemplo 1:

Con las matrices A, B y C de la actividad anterior se puede verificar la propiedad distributiva del producto respecto de la suma de matrices realizando A.(B+C) y A.B+A.C

» A*(B+C)

ans =

4.5000 10.6000

7.5000 -3.0000

-1.5000 7.8000

$$\gg A*B+A*C$$

ans =

4.5000 10.6000

7.5000 -3.0000

-1.5000 7.8000

Actividades

1 - Con las matrices ya introducidas en la actividad anterior realice:

- a) $A \cdot B$ y $B \cdot A$
- b) $C + \text{zeros}(3,2)$
- c) $C \cdot B^t + A^2$.

2 – Verifique los resultados obtenidos en los ejercicios de la guía de Práctica N° 1.

Operaciones matriciales puntuales

Las operaciones matriciales puntuales son las que se efectúan elemento a elemento. Algunas de ellas son:

Operación	Símbolo
Producto	\cdot *
Potencia	\cdot ^
División derecha	\cdot /

Actividades

Dadas las matrices $E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0.2 \end{bmatrix}$ y $F = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1/2 \end{bmatrix}$,

Calcule: i) $E \cdot F$, ii) $E \cdot^2$, iii) $E \cdot F$

Manipulación matricial

Una vez introducida una matriz, MATLAB brinda mecanismos para insertar, extraer y combinar, elementos, filas y columnas de ella, identificando los subíndices de interés.

Actividades

Visualice la matriz E de la actividad anterior, ejecute las siguientes órdenes e indique la tarea realizan.

- a) E(2,3) b) E(2,3) = 1/2 c) H = E(2,:) d) K = E(:,1)
- e) E(1,[2 3]) f) D = [E K] g) E = [E;ones(2,3)] h) E(:,3)=[]

7 - Introduzca las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -6 & -1 & 2 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

- a) Forme la matriz ampliada C = [A B]
- b) Forme la matriz U, que consiste solo en la 2º y 4º columnas de A.
- c) Forme la matriz T, que consiste solo en la 1º y 2º filas de A.
- d) Forme la matriz V, que consiste solo en las filas 2º y 3º y las columnas 1º y 2º de A

Funciones matriciales

Algunas de las funciones matriciales contenidas en MATLAB son:

det	Determinante
inv	Inversa
rref	Matriz escalonada reducida por filas
rank	Rango
size	Dimensiones de una matriz
trace	Traza
sqrt	Raíz cuadrada de cada elemento de una matriz
sqrtm	Raíz cuadrada de una matriz

Ejemplo 1:

La traza de la matriz ones(3) se obtiene haciendo
 » trace(ones(3))

ans =

3

Actividades

1.- Ingrese la matriz $H = \begin{bmatrix} 1 & 0.84 & -2 \\ -1 & 1/2 & \pi \\ 4 & 7.5 & -2 \end{bmatrix}$ y determine:

- a) la matriz escalonada reducida por filas de H
- b) el rango de la matriz H
- c) el determinante de la matriz H
- d) la inversa de H

3 - Por análisis de ejemplos estudie la posible validez de las siguientes propiedades:

- a) $\text{Inv}(I) = I$
- b) Si A es inversible, $\text{inv}(\text{inv}(A)) = A$
- c) Si A y B son inversibles, $A*B$ es inversible e $\text{inv}(A*B) = \text{inv}(B)*\text{inv}(A)$

4 - Es posible encriptar un mensaje secreto usando una matriz cuadrada inversible cuyos elementos y los de su inversa son números enteros, ésta se llama *matriz de código*.

El procedimiento es el siguiente: se asigna a cada letra del abecedario un número (por ejemplo, A=1, B=2, etc., y espacio = 28), se transforma el mensaje asignando a cada letra el número correspondiente, los números obtenidos se ubican de izquierda a derecha en las filas de una matriz M (matriz de mensaje) de tal modo que el número de elementos de cada fila sea igual al orden de la matriz de código, se multiplica M por la matriz de código *por derecha*, se transcribe el mensaje a una cadena de números (que se lee de izquierda a derecha a lo largo de cada fila) y se envía el mensaje.

El receptor del mensaje conoce la matriz de código, arregla el mensaje encriptado en una matriz ubicando los números de izquierda a derecha en cada fila, de modo tal que el número de columnas de dicha matriz coincida con el orden de la matriz de código, multiplica *por derecha* por la inversa de la matriz de código y puede leer el mensaje decodificado.

Actividad

Si C es la matriz de código, decodifique el mensaje que se encuentra más abajo:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & 5 \\ -2 & -5 & 8 & -8 & -9 \\ 1 & 2 & -2 & 7 & 9 \\ 1 & 1 & 0 & 6 & 12 \\ 2 & 4 & -6 & 8 & 11 \end{pmatrix}$$

Mensaje:

128, 107, 167, 55, -235, -206, -279, -39, 232, 188, 347, 183, 273, 194, 412, 274, 272, 221, 353, 126.

MATLAB

ÁLGEBRA II Guía N° 2

PROFESORADO Y LIC. EN MATEMÁTICA

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Para resolver sistemas de ecuaciones con MATLAB es necesario que éstos sean expresados en forma matricial.

Para cada uno de los sistemas siguientes, llame A, a la matriz de coeficientes y B a la matriz columna de términos independientes. Forme la matriz ampliada y use la función rref para encontrar la forma escalón reducida por filas. Muestre que cada uno de estos sistemas tiene solución única y que la solución está contenida en la última columna de la forma reducida de la matriz ampliada. Use la notación de submatrices para asignar a la variable X la solución.

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x + 3y - 3z = 1 \\ 4x - z = -1 \\ 5x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{5}z = -1 \\ \frac{7}{2}x - 3y + 2z = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} x - iy - z = i \\ y - iz = i \\ ix + 2y = 1 + i \end{cases}$$

Calcule $A \cdot X$ y compare con B

5- Para cada uno de los siguientes sistemas introduzca la matriz ampliada y use la función rref para encontrar la forma escalón reducida por filas. Concluya que ninguno tiene solución.

$$\begin{cases} 2x - 3y = -2 \\ 2x + y = 1 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x - 2y + z - 4w = 1 \\ x + 3y + 7z + 2w = 2 \\ x - 12y - 11z - 16w = 5 \end{cases}$$

6- Las matrices siguientes son matrices ampliadas de sistemas de ecuaciones que tienen más de una solución.

$$\begin{bmatrix} 9 & 27 & 3 & 3 & \cdots & 12 \\ 9 & 27 & 10 & 1 & \cdots & 19 \\ 1 & 3 & 5 & 9 & \cdots & 6 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 3+i & -i & \cdots & -2 \\ 0 & 2 & 1+i & \cdots & -i \\ 2 & 1+i & -1-2i & \cdots & -2+i \end{bmatrix}$$

para cada matriz use la función rref. Para obtener el conjunto solución de estos sistemas necesitará papel y lápiz.

Para cada sistema asigne la variable A a la matriz de coeficientes, B a la matriz de términos independientes, dé una solución particular del sistema y asígnele el nombre X. Calcule $A \cdot X$ y compare con B.

7 - Analice si los siguientes sistemas homogéneos son determinados o indeterminados. Resuelva el ejercicio empleando

- la función rref
- la función rank
- Indique cual de las dos formas es la más conveniente en este caso y explique los alcances y limitaciones de ambas funciones.

$$\begin{cases} x + 2y - z + 3w = 0 \\ 2x + 4y - 2z + 6w = 0 \\ 3x + 6y - 3z + 9w = 0 \\ x + 3y + z + 2w = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -4x + 2y - 2w = 0 \\ 2x - 3z + 2w = 0 \\ x + 3y - 4z + 3w = 0 \\ -x + 4z - 4w = 0 \end{cases}$$

8 - Se pueden resolver sistemas cuadrados $AX = B$ en los cuales la matriz de coeficientes es invertible realizando $X = \text{inv}(A) \cdot B$ (Teorema de Cramer).

Confeccione un archivo-M de función que resuelva, cuando sea posible, los siguientes sistemas cuadrados.

$$a) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -6 \\ 5 \\ -6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$b) \quad A1 = \begin{bmatrix} 2 & 1+i & -3 \\ 1-i & 0 & 2+3i \\ 0 & -i & 2i \end{bmatrix} \quad B1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1+i \end{bmatrix}$$

MATLAB

ÁLGEBRA II

PROFESORADO Y LIC. DE MATEMÁTICA

Guía N° 3

Espacios vectoriales. Combinaciones lineales. Subespacio generado. Dependencia e independencia lineal. Base y dimensión

Los vectores de R^n se introducen en MATLAB como matrices de una fila o una columna y se puede operar con ellos de igual modo que con las matrices.

- 1- Escriba al vector s como combinación lineal de los vectores s_1 y s_2 . Utilice la función `rref` para determinar los escalares.

$$s = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} \quad s_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad s_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

- 2- Determine en cada caso si el vector v pertenece al subespacio generado por el conjunto dado. Resuelva el problema de dos maneras diferentes: empleando la función `rref` y luego la función `rank`. Explique cual es la más conveniente para este caso en particular.

$$a) \quad v = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$b) \quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

- 3- Determine si los vectores u , v y w generan al espacio vectorial V .

$$a) \quad u = \begin{pmatrix} -12 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 15 \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 14 \end{pmatrix} \quad V = R^{1 \times 3}$$

$$b) \quad u = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 3 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \quad V = R^{1 \times 4}$$

4- Determine en cada caso si el conjunto de vectores $\{v_1, v_2, v_3\}$ es linealmente independiente o linealmente dependiente, considerando los respectivos espacios sobre el cuerpo de los números reales.

$$a) v_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b) v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} -5 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$c) v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0.7 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 3 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -0.8 \\ 7 \\ 0.3 \end{pmatrix}$$

5- Determine si los siguientes conjuntos constituyen una base del espacio vectorial dado:

$$a) \left\{ [1 \ 0 \ 1 \ 0], [2 \ -1 \ 1 \ 0], [0 \ 1 \ 1 \ 1], [3 \ 0 \ -1 \ 1] \right\} \quad V = \mathbb{R}^{1 \times 4}$$

$$b) \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad V = \mathbb{R}^{3 \times 1}$$

6- Dada la base $B = \{(1,2,3), (-1,0,7), (7,5,0)\}$ de \mathbb{R}^3

Halle las coordenadas de v_1, v_2 y v_3 respecto de la base dada. Realice el cálculo para los tres vectores en un solo procedimiento.

$$v_1 = (1,2,3) \quad v_2 = (0,-3,12) \quad v_3 = (-7, 2,-8)$$

MATLAB

ÁLGEBRA II

PROFESORADO Y LIC. EN MATEMÁTICA

Guía N° 4

Producto Interior. Norma. Ángulo. Conjuntos Ortogonales y Ortonormales

Si x e y son dos vectores fila o columna de la misma dimensión, **dot(x,y)** calcula el producto escalar de los vectores x e y

1 - Halle el producto escalar de u y v en cada caso

a) $u = (2,-3,0)$ $v = (0,-1,8)$

b) $u = (0.2,-5,67,4)$ $v = (1/9,2.75,0,-5)$

c) $u = (0.73,-1)$ $v = (-2,0)$

2 - La norma de un vector se puede calcular de diferentes maneras:

Proponga un vector v de cuatro componentes y calcule:

a) $\text{dot}(v,v)^{(1/2)}$ ¿Que operaciones realiza?

b) $\text{sqrt}(\text{dot}(v,v))$ ¿Que operaciones realiza?

c) $\text{norm}(v,2)$

d) Compare los resultados y repita el ejercicio para vectores de más componentes.

3 - Dados $v = [1 \ -1]$ y $w = [2 \ -3]$

Calcule:

a) El versor de v

b) Un vector paralelo a v de módulo 5

c) Un vector paralelo a w de módulo 3

d) La distancia de v a w

e) La proyección de v sobre w . Utilizando el valor encontrado halle un vector ortogonal a w

Realice una gráfica de los vectores v y w y de cada uno de los vectores resultantes de cada ítem, todos en la misma figura para poder comparar.

4 - Calcule la medida del ángulo entre v y w para los vectores del ejercicio anterior. (Ayuda: MATLAB cuenta con la función **acos**, tal que $\text{acos}(x)$ da la medida del ángulo cuyo coseno es x expresado en radianes).

5 - MATLAB cuenta en su librería con la función matricial **trace** que calcula la traza de una matriz cuadrada. Para los siguientes pares de matrices calcule el producto interior definido como $A \cdot B = \text{Tr}(B^t \cdot A)$

$$a) A = \begin{bmatrix} -6 & 5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \quad b) A = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 1/2 \\ 7 & 42 & 21 \\ -4 & 1/2 & 2/5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -12 & 5 & -4 \\ 1/7 & 6 & -20 \\ 2 & 4 & -10 \end{bmatrix}$$

6 - Calcule la norma de cada una de las matrices del ejercicio anterior.

7 - Determine cuales de los siguientes conjuntos son ortogonales y cuales ortonormales:

a) $\{ (3, -1, 4, 0), (1, 0, -3/4, 5), (-5, -15, 0, 1) \}$

b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1/2 \\ -3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -3/4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 4/5 \end{pmatrix} \right\}$

c) $\left\{ [-1/\sqrt{30} \ 5/\sqrt{30} \ -2/\sqrt{30}], [2/\sqrt{5} \ 0 \ -1/\sqrt{5}], [1/\sqrt{6} \ 2/\sqrt{6} \ 2/\sqrt{6}] \right\}$

8 - Para obtener bases ortonormales de un espacio vectorial, MATLAB cuenta con la función **orth**.

orth(A) da una base ortonormal del subespacio generado por las columnas de la matriz A.

Realice lo siguiente:

a) Introduzca la matriz $A = [1 \ 2; 0 \ 4]$

b) Escriba $B = \text{orth}(A)$

c) Verifique que las columnas de B generan al subespacio columna de A y que son linealmente independientes. Es decir, que forman una base.

d) Realice el producto interior de los vectores columnas de B y calcule sus normas a fin de verificar que dicha base es ortonormal.

9 - Determine una base ortonormal para los siguientes subespacios:

a) El subespacio generado por $v_1 = (-2, 3, -1)$, $v_2 = (0, -2, 2)$.

b) El subespacio generado por $v_1 = (-2, 5, 0, 4)$, $v_2 = (1, 1, 2, -1)$, $v_3 = (1, 0, 0, 0)$

c) $W = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + 2y - z = 0 \}$

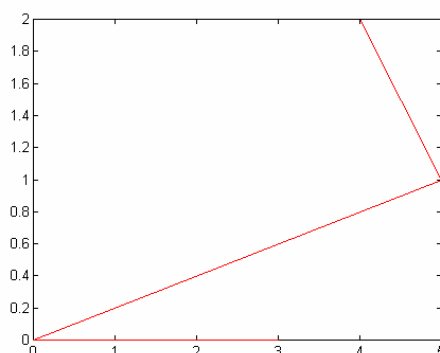
Aplicaciones a la Geometría Analítica

➤ Gráficos con MATLAB en el plano

Introduzca los vectores fila $u=[3\ 0\ 5\ 4]$, $v=[0\ 0\ 1\ 2]$ y a continuación escriba `plot(u,v)`, oprima enter y observe que ocurre.

En este caso el comando **plot** representa una biyección entre los elementos de u y los elementos del v . En los ejes aparece una porción de escala necesaria (auto-escalado) para que se puedan representar las componentes de los vectores dados.

El comando `plot` grafica entonces en este caso los puntos $(3,0)$, $(0,0)$, $(5,1)$ y $(4,2)$ y dibuja un segmento de recta entre los consecutivos como lo muestra la figura:



Proponga vectores con gran diferencia de valores (positivos y negativos) y observe la “acomodación” de las escalas.

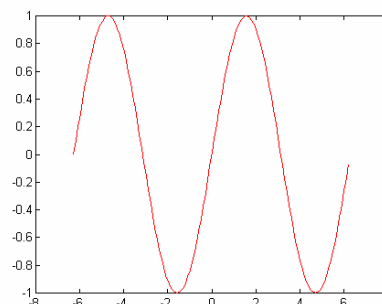
➤ Gráfica de funciones

Se desea graficar la función seno en el intervalo $[-2\pi, 2\pi]$. Para ello se escriben las siguientes instrucciones:

```
» x=-2*pi:0.1:2*pi;
» y=sin(x);
» plot(x,y)
```

El vector x es una partición del dominio con incremento de 0.1, mientras que y es un vector con los valores que toma el seno en los puntos de esa partición.

Este conjunto de instrucciones produce el siguiente gráfico:

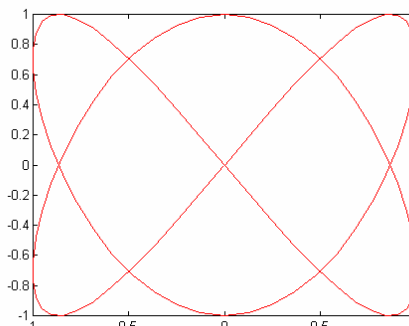


Pueden también realizarse gráficas de curvas definidas paramétricamente. Por ejemplo:

```

» t=0:2*pi/100:2*pi;
» x=sin(2*t);
» y=sin(3*t);
» plot(x,y)
  
```

produce el gráfico:



Veamos a modo de ejemplo como graficar la elipse cuya ecuación está dada por:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

Esta elipse tiene por centro a $C = (0,0)$, la longitud del semieje mayor es 3, del semieje menor es 2, su eje focal se encuentra sobre el eje X, sus vértices son $A = (3, 0)$, $A' = (-3, 0)$. Para realizar la gráfica, se dan valores a x y éstos deben incluir las abscisas de los vértices de modo que pueda verse en el gráfico la elipse completa y no una porción de ella, Por lo tanto se tomarán los elementos del vector x en el intervalo $[-3, 3]$. Por otra parte, el vector y debe estar expresado en función de x.

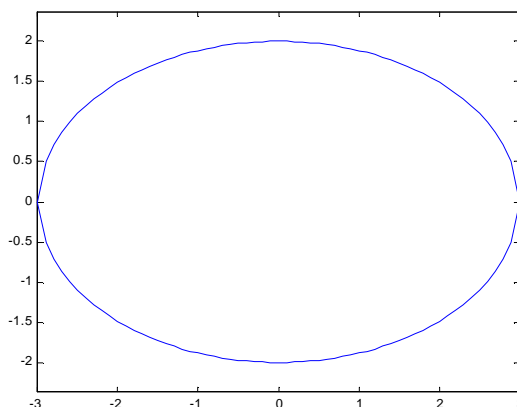
Entonces, despejando y se tiene que:

$$y = \pm \sqrt{4 - \frac{4}{9}x^2}$$

Por lo tanto las instrucciones siguientes producirán el gráfico de la elipse dada.

```

» x=-3:.1:3;
» y1=sqrt(4-4/9*x.^2);
» y2=-sqrt(4-4/9*x.^2);
» plot(x,y1)
» hold on
» plot(x,y2)
» axis equal
  
```



De manera similar se puede graficar cualquier cónica

Ejercicio:

Realice el gráfico de las siguientes rectas de \mathbb{R}^2 de modo tal que en cada eje aparezcan escritos sus nombres 'X' e 'Y', el título del gráfico sea "Recta", sobre la recta se vea escrita su ecuación y la gráfica esté cuadrículada. De la observación de la figura identifique algunos puntos pertenecientes a cada recta. (Nota: tenga en cuenta que para graficar una recta son necesarios solo dos puntos).

$$\text{a) } y = 2x - 3 \quad \text{b) } y = 4x \quad \text{c) } \begin{cases} x = \frac{1}{2}t \\ y = 3t \end{cases} \quad \text{d) } (x,y) = t(1,2)$$

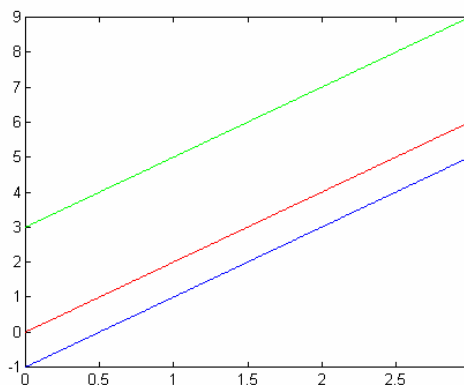
(Tenga en cuenta en el punto (d) que la ecuación vectorial debe expresarse en forma paramétrica o cartesiana)

Existen dos formas en las que se puede realizar una graficación simultanea de curvas. Esto es importante cuando se quieren comparar los gráficos de dos o más funciones:

Ejemplo:

```
» x=[0 3];
» y1=2*x;
» y2=2*x-1
» plot(x,y1,x,y2)
```

Produce el gráfico:



Otra forma es usando el comando **hold**,

Ejemplo:

```
» x=[0 3];
» y1= 2*x;
» plot(x,y1)
» hold on
» y2=-3*x+4;
» plot(x,y2)
» y3= (-1/2)*x
» plot(x,y3)
```

» hold off

Escriba la lista precedente de instrucciones y observe lo que obtiene.

Por defecto los ejes se autoescalán. Si se desea cambiar la escala se usa el comando **axis**

Si $C=[X_{\min} \ X_{\max} \ Y_{\min} \ Y_{\max}]$ es un vector de cuatro elementos donde X_{\min} , X_{\max} son los valores mínimo y máximo respectivamente que se toman sobre el eje X y Y_{\min} , Y_{\max} , son los valores mínimo y máximo que se toman sobre el eje Y, axis(C) establece el escalado de los ejes a los límites prescritos

axis sin argumento congela el escalado actual para los gráficos siguientes y escribiendo **axis** nuevamente, se vuelve al autoescalado.

axis('equal') produce separaciones de igual medida en los dos ejes.

Ejercicios:

- 1 - Dé las ecuaciones de cuatro rectas paralelas tal que una de ellas contenga al origen. Gráfiquelas en una misma figura de forma que:
 - a) El título de la figura sea "Rectas paralelas"
 - b) Los ejes estén identificados con "x" e "y"
 - c) La gráfica aparezca cuadrículada.
 - d) En cada recta aparezca su ecuación
 - e) La escala en ambos ejes sea la misma.

- 2 - Realice la gráfica de los siguientes pares de rectas y determine su punto de intersección a partir de la figura. Luego calcule, usando MATLAB, mediante sistemas de ecuaciones la intersección de dichas rectas y compare resultados.
 - a) $L_1: y = 2x - 5$
 $L_2: y = 1/3 x - 5/3$

 - b) $L_1: y = -7x$
 $L_2: y = x$

 - c) $L_1: \begin{cases} x - 4 = t \\ y = -t \end{cases}$ $L_2: \begin{cases} x - 1 = -1/2 t \\ y = -t \end{cases}$

- 3 - Las siguientes rectas son ortogonales:
 $L_1: y = 2x - 5$ $L_2: y = -1/2x$
 - a) Realice la gráfica de ambas rectas en la misma figura, cuadricule y observe si éstas "se ven" perpendiculares.
 - b) Escriba ahora la instrucción **axis('equal')** y vea que ocurre.
 - c) Explique la diferencia entre los items a) y b).

➤ Gráficos con MATLAB en el espacio

La instrucción **mesh** crea en un gráfico tridimensional una superficie de malla que está definida por las terceras componentes de los puntos sobre una cuadrícula rectangular en el plano XY.

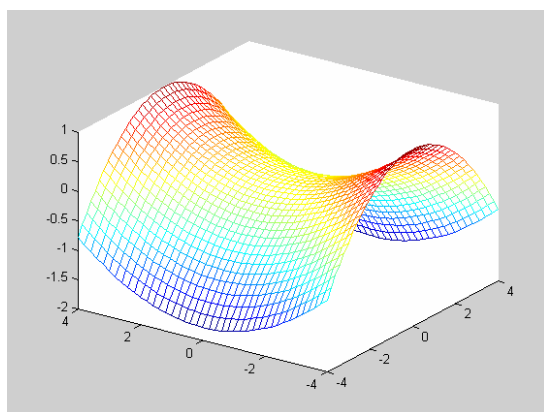
Para realizar el gráfico de una función se debe definir en primer lugar los vectores x e y que dan la partición del rectángulo (es decir se define el dominio) con la función **meshgrid**.

Ejemplo 1:

```
» [x y]=meshgrid(-4:0.2:4); % genera una rejilla rectangular de puntos
% igualmente espaciados entre -4 y 4 en cada eje.
» z=y.^2/16-x.^2/9;
» mesh(x,y,z)
```

Este conjunto de instrucciones genera la gráfica del paraboloides hiperbólico

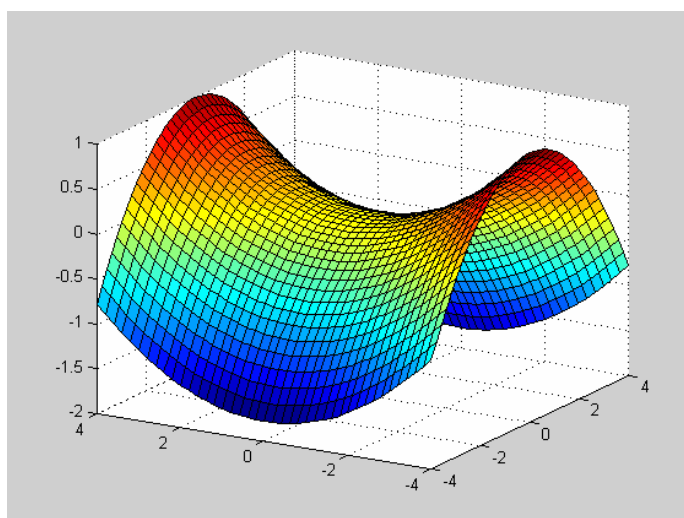
$z = \frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9}$ sobre el rectángulo $[-4,4] \times [-4,4]$ que se muestra en la figura siguiente:



Un **gráfico de superficie** de la misma función se obtiene con la función **surf** en lugar de mesh. Por lo que:

```
» surf(x,y,z)
```

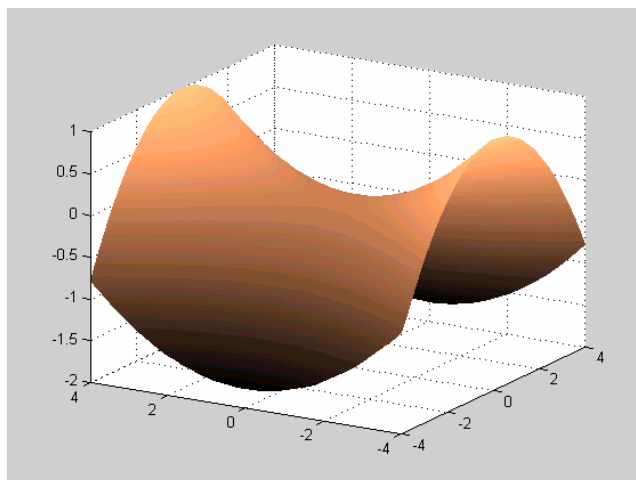
producirá el gráfico siguiente:



Y si se le agregan las sentencias:

- » shading interp
- » colormap(copper)

se obtiene:



Del igual modo se pueden graficar otras cuádricas.

Ejercicio: Escriba las siguientes instrucciones en MATLAB

- » [x y] = meshgrid(-2:0.1:2);
- » z= -x + y - 1;
- » surf(x,y,z)

¿Qué figura obtiene?

Nota: Los comandos axis, hold, grid, title, xlabel, ylabel, zlabel, etc. tienen en este caso la misma aplicación.

Ejercicios:

5 - Realice el gráfico de los siguientes planos, de tal modo que en cada eje esté escrito su nombre (X, Y y Z) y el gráfico esté cuadrículado.

- a) $2x + 3y - z = 2$
- b) $x + y - z = 0$
- c) $x - z = 5$

6 - Se desea realizar la gráfica del plano $x = 3$

Tenga en cuenta que la información que nos brinda esta ecuación es que mientras y y z varían en todos los reales x toma siempre el valor 3. Luego el conjunto de instrucciones que se deben escribir varían ligeramente de las dadas anteriormente.

En este caso se definirán primero los valores para y y z ya que éstas no dependen de ninguna variable, y se escribirá:


```

» [y z]=meshgrid(-2:0.2:3);
»x=0*y+0*z+3;
»mesh(x,y,z)

```

¿Por qué se escribe $x=0*y+0*z+3$ y no $x=3$ simplemente? Haga la prueba usando esta instrucción y vea que ocurre.

7 - En cada uno de los siguientes casos grafique los planos dados en una misma figura (use hold on y hold off) y observe su posición relativa. Resuelva también en cada caso, usando MATLAB, el sistema formado por las ecuaciones de dichos planos. Compare la posición relativa con la compatibilidad o incompatibilidad del sistema, con el hecho de ser determinado o indeterminado y con el rango de la matriz de coeficientes. Extraiga conclusiones.

a) $\Pi_1 : 2x + 3y - 2z = 0$ $\Pi_2 : 5x - y + 4z = 0$

b) $\Pi_1 : x + y - z + 10 = 0$ $\Pi_2 : 2x + 2y - 2z = 0$

c) $\Pi_1 : x + 3y - 2z = 0$ $\Pi_2 : -x + 5y + 3z - 1 = 0$ $\Pi_3 : 8y + z - 1 = 0$

d) $\Pi_1 : 5x - 2y + z - 3 = 0$ $\Pi_2 : -x + z = 0$ $\Pi_3 : 2x - 2z - 20 = 0$

Realice los gráficos sobre el rectángulo $[-4,4] \times [-4,4]$

➤ Gráfica de rectas en el espacio

Como pudo observar, con el comando mesh se realiza la gráfica de una superficie de malla en el espacio tridimensional, de modo que podemos, mediante este comando, “ver” la recta pero solo como la intersección de dos planos.

Para graficar una recta en el espacio se emplea el comando **plot3**, que es una extensión del comando plot a gráficos en el espacio tridimensional.

Ejemplo:

Se desea graficar la recta que contiene al punto $(1,0,3)$ y es paralela al vector $(-1,1,2)$. La ecuación vectorial de esta recta es $(x,y,z) = (1,0,3) + t(-1,1,2)$ Y las ecuaciones paramétricas:

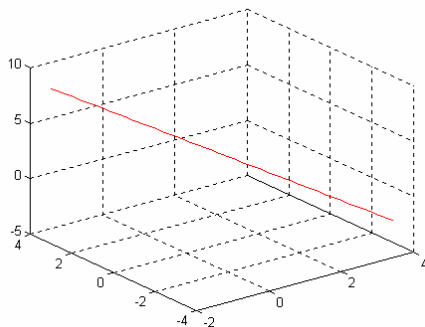
$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$$

Se puede realizar la gráfica empleando las ecuaciones paramétricas del siguiente modo:

```

>>t = -3:0.1:3;
>>x = 1-t; y = t; z=3+2*t;
>>plot3(x,y,z)
    
```

Si se agrega la instrucción grid puede verse el gráfico cuadrículado



Puede realizarse también la gráfica empleando las ecuaciones cartesianas de la recta, en este caso son :

$$-x + 1 = y = \frac{z - 3}{2}$$

Es importante tener en cuenta que para graficar una recta con plot3 a partir de sus ecuaciones cartesianas, éstas deben estar expresadas de tal forma que dos de las variables, estén en función de una misma (por ejemplo y y z en función de x). En este caso las ecuaciones cartesianas quedarían expresadas:

$$\begin{cases} y = -x + 1 \\ z = -2x + 5 \end{cases}$$

Escriba hold on para graficar en la misma figura y así poder verificar si efectivamente se obtiene la misma recta, luego escriba las siguientes instrucciones:

```

x = -3:0.1:3;
y = -x + 1;
z = -2*x + 5;
plot3(x,y,z,'b')
hold off
    
```

El argumento 'b' en plot3 significa que la recta se graficará en color azul.

- 8 - En cada uno de los siguientes casos realice los gráficos de la recta y el plano dados, en una misma figura y analice su posición relativa. Luego resuelva el sistema formado por las ecuaciones de la recta y el plano, empleando MATLAB, y extraiga

conclusiones (Sugerencia: en este caso es aconsejable que trabaje con las ecuaciones cartesianas de la recta)

$$\text{a) L: } \frac{x-5}{2} = \frac{y-5}{-3} = \frac{z-1}{5} \quad \text{II: } 2x - 3y + 5z = 0$$

$$\text{a) L: } (x,y,z) = (1,-1,0) + t(1,1,0)$$
$$\text{II: } z = 3$$

$$\text{b) } \begin{cases} x-1 = t \\ y = -t \\ z-2 = 5t \end{cases} \quad \text{II: } 5x - z - 3 = 0$$

MATLAB

ÁLGEBRA II

PROFESORADO Y LIC. EN MATEMÁTICA

Guía N° 5

Transformaciones Lineales

- 1 - Halle la matriz asociada a la transformación lineal dada respecto de las bases B y B'. Tenga en cuenta que primero deberá trabajar con papel y lápiz hasta formar los sistemas de ecuaciones, que tendrán la misma matriz de coeficientes pero variarán en sus términos independientes.

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ tal que } f(x,y,z) = (x,z)$$

$$B = \left\{ (-1,2,0), (1,0,3), (0,1,3) \right\} \quad B' = \left\{ (1,2), (-1,1) \right\}$$

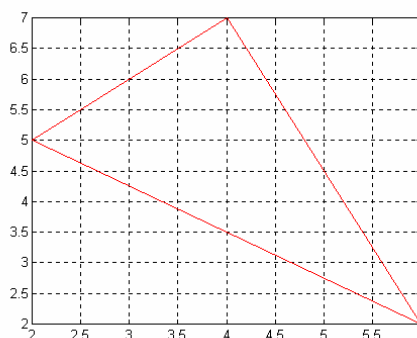
Observe la matriz ampliada que ha formado con las tres columnas de términos independientes. ¿Qué vectores están ubicados en las columnas de la matriz de coeficientes? ¿Qué vectores están ubicados en las columnas de términos independientes? Luego de aplicar rref a la matriz ampliada ¿qué matriz representa la submatriz formada por las tres últimas columnas?

De estas observaciones, confeccione una regla que le permita en lo sucesivo trabajar menos con papel y lápiz.

➤ **Modificación de figuras del plano por medio de transformaciones lineales.**

Si se escriben siguientes instrucciones de MATLAB se obtiene el gráfico de un triángulo:

```
» x=[2 4 6 2];y=[5 7 2 5];
» plot (x,y)
» grid
```



Recuerde que plot grafica los puntos de una biyección entre x e y, en este caso (2,5), (4,7), (6,2) y (2,5), y los une con un segmento de recta. Como puede observarse en la

gráfica estos puntos son justamente los vértices de un triángulo. Por lo tanto si se desea dibujar un triángulo conociendo sus vértices se forman los vectores x e y de tal manera que los elementos de x sean las abscisas y los elementos de y sean las ordenadas de cada punto. Observe que el primer elemento debe repetirse al final tanto en x como en y , porque si esto no ocurriera plot no uniría el último vértice con el primero. Pruebe realizando la gráfica para los vectores x e y dados pero sin el último elemento.

Ejercicio:

Dibuje las siguientes figuras, respetando el orden en el que están dados los vértices:

- El triángulo de vértices $(-1,3)$, $(0,0)$, $(3,-2)$
- El paralelogramo de vértices $(1,-2)$, $(2,1)$, $(6,1)$, $(5,-2)$

Dada una figura en el plano se desea “ver” que efectos produce sobre ella determinada transformación lineal:

Ejemplo:

La transformación lineal $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(x, y) = (3x, y)$ produce una expansión a lo largo del eje X .

La matriz asociada a esta transformación lineal respecto de la base canónica de \mathbb{R}^2 es:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora bien, se desea aplicar esta transformación lineal al triángulo de vértices $P=(0,0)$, $Q = (2,5)$ y $R = (6,3)$.

El procedimiento a seguir es el siguiente:

1° - Se introducen los vectores P , Q y R . Es conveniente que éstos sean expresados como vectores columnas, ya que posteriormente deberán multiplicarse por la matriz A .

2°- Se construye una matriz T cuyas columnas son P , Q y R . Esta matriz tiene como primera fila a las abscisas de los vértices y como segunda fila a las ordenadas.

3° - Se forman los vectores x de las abscisas e y de las ordenadas de los vértices y se realiza la gráfica del triángulo.

4°- Se realiza el producto $A*T$ a fin de obtener las imágenes.

5°-Se construyen los vectores $x1$ de las abscisas e $y1$ de las ordenadas de las imágenes y se realiza la gráfica, en una misma figura, del transformado del triángulo.

Las instrucciones correspondientes son:

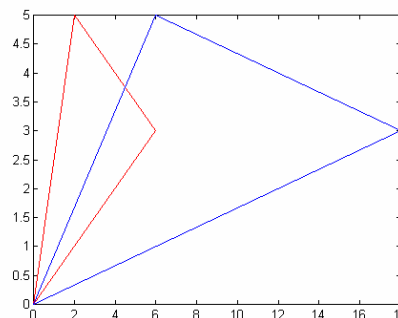
$$1^\circ \left\{ \begin{array}{l} P=[0 \ 0]'; Q=[2 \ 5]'; R=[6 \ 3]'; \end{array} \right.$$

$$2^\circ \left\{ \begin{array}{l} T=[P \ Q \ R \ P] \end{array} \right.$$

$$3^\circ \left\{ \begin{array}{l} x=T(1, :); y=T(2, :); \\ \text{plot}(x,y) \end{array} \right.$$

$$4^\circ \left\{ \begin{array}{l} A=[3 \ 0 \\ 0 \ 1]; \\ \text{Im}=A*T; \end{array} \right.$$

$$5^\circ \left\{ \begin{array}{l} \text{hold on} \\ x1=\text{Im}(1, :); y1=\text{Im}(2, :); \\ \text{plot}(x1,y1,'g') \end{array} \right.$$



Realice a continuación para el mismo triángulo y siempre en la misma figura del MATLAB una expansión a lo largo del eje Y con un factor igual a 2.

La matriz asociada a esta transformación lineal respecto de la base canónica es:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

De la misma forma en que se aplica una transformación lineal a una figura del plano, puede también aplicarse a curvas planas, el procedimiento es similar solo que se trabaja con una mayor cantidad de puntos.

Suponga que se desea aplicar una rotación un ángulo $\theta = \frac{\pi}{4}$ a la porción de la parábola

$y = 4x^2 + 2$ correspondiente al intervalo $[-2,2]$ y teniendo en cuenta que la matriz de

rotación es $\begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & \text{sen} \frac{\pi}{4} \\ -\text{sen} \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$, el siguiente conjunto de instrucciones producirán lo

deseado.

» x=-2:.2:2;
 » y=4*x.^2+2;
 » plot(x,y)
 » hold on

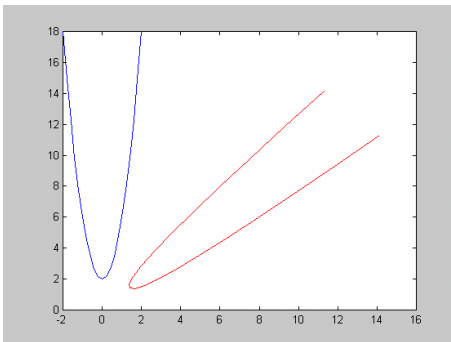
} dibuja la parábola original

» m=[cos(pi/4) sin(pi/4);-sin(pi/4) cos(pi/4)]; Introduce la matriz asociada

» puntos=[x;y]; forma una matriz cuya primera fila está compuesta por las abscisas y la segunda por las ordenadas de los puntos de la parábola

» puntos_imag=m*puntos; Calcula la imagen de dichos puntos
 » x1=puntos_imag(1,:); Forma el vector fila de las abscisas de los puntos imagen
 » y1=puntos_imag(2,:); Forma el vector fila de las ordenadas de los puntos imagen

» plot(x1,y1,'r')



En el siguiente cuadro figuran las matrices asociadas respecto de la base canónica de \mathbb{R}^2 de algunas transformaciones lineales:

$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	Expansión por un factor k , a lo largo del eje X si $k > 1$ Contracción por un factor k , a lo largo del eje X si $0 < k < 1$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$	Expansión por un factor k , a lo largo del eje Y si $k > 1$ Contracción por un factor k , a lo largo del eje Y si $0 < k < 1$
$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$	Expansión por un factor k , en ambas direcciones si $k > 1$ Contracción por un factor k , en ambas direcciones si $0 < k < 1$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	Reflexión respecto del eje X
$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	Reflexión respecto del eje Y
$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$	Rotación con centro en el origen de coordenadas y ángulo θ

Ejercicios:

- 1 - Dibuje el cuadrilátero de vértices (0,1), (2,4), (4,4), (6,1) en ese orden y luego aplique a éste las siguientes transformaciones lineales, de modo que todos los gráficos se vean en una misma figura, recuerde que para diferenciarlos puede usar distintos tipos de líneas y/o colores.

- a) Expansión por un factor 5 a lo largo del eje Y.
- b) Contracción por un factor 1/2 en ambas direcciones.
- c) Reflexión respecto del eje X

2 - Dibuje la figura de vértices (2,-2), (2,7), (4, 5), (2,3) en ese orden y luego aplique a esta las siguientes composición de transformaciones lineales precediendo del mismo modo que en el ejercicio anterior.

- a) Reflexión respecto del eje Y y luego una rotación respecto al origen un ángulo de 60° (Tener en cuenta que MATLAB trabaja con ángulos expresados en radianes por lo que $60^\circ = \pi / 3$ que en el lenguaje de MATLAB se escribe pi /3).
- b) Reflexión respecto del origen y luego una expansión a lo largo del eje X un factor igual a -3.

➤ **Modificación de figuras y cuerpos en el espacio por medio de transformaciones lineales**

Al igual que en el plano, se puede “ver” en el espacio tridimensional, los efectos que produce una determinada transformación lineal sobre una figura o un cuerpo.

Para realizar la gráfica de figuras o cuerpos en el espacio usaremos el comando plot3 que funciona de la siguiente manera:

Dados los vectores $x=[x_1 \ x_2 \ x_3 \dots x_n]$, $y=[y_1 \ y_2 \ y_3 \dots y_n]$, $z=[z_1 \ z_2 \ z_3 \dots z_n]$ `plot3(x,y,z)` dibuja los puntos (x_1,y_1,z_1) , (x_2,y_2,z_2) , (x_3,y_3,z_3) ,..., (x_n,y_n,z_n) y los une con un segmento de recta. De esto se deduce que el vector \underline{x} está formado por las primeras componentes de tales puntos, el vector \underline{y} por las segundas componentes y el vector \underline{z} por las terceras.

Si se desea aplicar a estas figuras o cuerpos una transformación y luego poder visualizar su efecto se procede en forma análoga a lo realizado en el plano.

Ejercicios:

Dado el triángulo de vértices (2,3,-1), (5,0,-2), (4,-2,0), aplique las siguientes transformaciones lineales de modo que todas puedan verse en una misma figura, diferenciándose entre si por distintos colores o tipos de líneas.

- a) Simetría respecto del plano XY definida por: $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 / f(x,y,z) = (x,y,-z)$
- b) Simetría respecto del origen de coordenadas definida por
 $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 / f(x,y,z) = (-x,-y,-z)$
- c) Simetría respecto del eje Z definida por $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 / f(x,y,z) = (-x,-y,z)$

MATLAB

ÁLGEBRA II

PROFESORADO Y LIC. EN MATEMÁTICA

Guía N° 6

Valores y vectores propios. Diagonalización Formas cuadráticas

Las funciones matriciales que se describen a continuación le serán útiles para resolver los problemas planteados en este Trabajo Práctico:

eig: $\text{eig}(A)$ produce un vector columna cuyos elementos son los valores propios (eigenvalores) de una matriz cuadrada A .

$[V D]=\text{eig}(A)$ produce una matriz V cuyas columnas son los vectores propios de A y una matriz D diagonal en la cual los elementos de la diagonal son los valores propios de A

poly: si A es una matriz cuadrada de orden " n ", $\text{poly}(A)$ es un vector fila, tal que sus $n + 1$ elementos son los coeficientes del polinomio característico de A ordenados en forma decreciente.

1 - Halle los valores propios de las siguientes matrices consideradas sobre el cuerpo de los números reales.

a) $\begin{pmatrix} -3 & 10 \\ -3 & -8 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 10 & -4 & 5 \\ 5 & -4 & 6 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 10 & 15 \\ -2 & -6 & -9 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2 & -1/2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2 - Para cada una de las matrices del ejercicio anterior encuentre su polinomio característico y verifique que los valores propios obtenidos son efectivamente las raíces de dicho polinomio.

3 - Verifique la posible validez de las siguientes proposiciones mediante el análisis de ejemplos. En todos los casos A es una matriz cuadrada.

- a) Si A es una matriz diagonal entonces sus valores propios son los elementos de la diagonal.
- b) 0 es un valor propio de A si y solo si A no es inversible
- c) A y A^t tienen el mismo polinomio característico.
- d) A es raíz de su polinomio característico. (Teorema de Cayley-Hamilton)

4 - En cada uno de los siguientes casos indique si la matriz A dada es diagonalizable. Si así lo fuera encuentre la matriz C que la diagonaliza y calcule C⁻¹ A C.

a)
$$\begin{pmatrix} -1 & -4 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

b)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

5 - Para cada una de las siguientes matrices simétricas, halle una matriz ortogonal que la diagonalice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 12 \\ -5 & 4 & -2 \\ 12 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 6 & 8 \\ -1 & 5 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & -8 & 3 \\ 8 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 5 & -\frac{3}{2} & 4 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & 4 & -\frac{9}{2} & \frac{7}{2} \\ 4 & -\frac{9}{2} & 2 & 3 \\ -\frac{1}{2} & \frac{7}{2} & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

6 - En los siguientes casos:

- i) Realice la gráfica correspondientes a las ecuaciones cuadráticas dadas
- ii) Escriba la ecuación en la forma Av.v = d (donde A es una matriz simétrica) y elimine el término que contiene a xy rotando los ejes un ángulo θ.
- iii) Escriba la ecuación en términos de las nuevas variables e identifique la cónica que se obtiene.
- iv) Verifique los resultados comparándolos con la gráfica realizada.

- a) $3x^2 - 2xy - 5 = 0$
- b) $3x^2 - 6xy + 5y^2 = 36$
- c) $-x^2 + 2xy - y^2 = 0$

Bibliografía

- The Math Works, Inc. (1997). *MATLAB, Versión 5, Guía del Usuario*.
- The Math Works, Inc. (1996). *MATLAB, Edición de Estudiante, Versión 4, Guía del Usuario*. (1° Ed).
- Nakamura, S. (1997). *Análisis Numérico y Visualización Gráfica con MATLAB* (1° Ed.). Mexico: Ed. Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A.
- Nakos, G. y Joyber, D. (1999). *Álgebra Lineal con aplicaciones*. México: International Thomson Editores
- Poole, David. (2003). *Álgebra Lineal*. México: International Thomson Editores.
- Gerber, H. (1992). *Álgebra Lineal*. México: Grupo Editorial Iberomérica.
- Noble B., Daniel J. (1989). *Álgebra Lineal Aplicada* (3° Ed.). México: Ed. Prentice – Hall.