LISTADO DE LOS ENUNCIADOS DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS DESDE JUNIO 2006 A DICIEMBRE 2011

Año 2006

(para ver soluciones, http://galeon.com/casanchi/problemas2006.pdf)

PROBLEMA 001

Sea el espacio vectorial V de los polinomios de grado menor o igual que tres con coordenadas reales, y sea $B = \{1, x, x^2, x^3\}$ una base. Se pide:

Obtener la base dual $\hat{B}$ en el espacio dual $\hat{V}$.

Si $F(\varphi) = \varphi(4)$ es una forma lineal, hallar sus coordenadas respecto de la base dual $\hat{B}$.

Hallar las coordenadas en la base dual $\hat{B}$ de la forma lineal:

$$I(\varphi) = \int_0^1 \varphi(x).dx$$

PROBLEMA 002

Resuelva la ecuación

$$2x^3 - 9x^2 + 32x + 75 = 0$$

sabiendo que admite una raíz compleja de módulo 5.

PROBLEMA 003

Sea *M* el conjunto de las matrices ortogonales del tipo

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad donde \ a,b,c,d \in R$$

y sea *f* la aplicación definida del siguiente modo:

$$f : M \to R^4$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & b & c & d \end{pmatrix}$$

Justifique con detalle que el conjunto imagen de *M* mediante la aplicación *f* es un conjunto cerrado del espacio topológico de cuatro dimensiones R^4.

PROBLEMA 004

Dada la sucesión de funciones $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ donde:

$$f_n(x) = \frac{nx - 1}{(x.L(n+1))(1 + nx^2.Ln)}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad n = 1,2,\ldots$$

Calcular $\lim_{n \to \infty} \int_0^1 f_n(x).dx$ y $\int_0^1 (\lim_{n \to \infty} f_n(x)).dx$

Explicar la aparente contradicción de los resultados.

PROBLEMA 005

Se considera el conjunto *N* de los números naturales dotado de la *topología cofinita T* (los abiertos son los complementarios de los conjuntos finitos).

1) ¿Es *(N, T)* espacio topológico?.
2) ¿Es Hausdorff?.
3) ¿La sucesión *{1,2,...,n,...}* converge?. ¿A qué punto?.
4) ¿Existe en *(N, T)* alguna sucesión que converja a un solo punto?.
5) ¿Existe alguna sucesión que no converja?.

PROBLEMA 006

Sea la superficie:

$$\begin{cases} x = u + uv^2 - u^3/3 \\ y = v + u^2v - v^3/3 \\ z = u^2 - v^2 \end{cases}$$

Determinar:
a) Las dos primeras formas cuadráticas fundamentales.
b) Las direcciones principales asociadas a cada punto.
c) Las líneas asintóticas.
d) Los radios de curvatura principales.

PROBLEMA 007

Desarrollar en serie de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n.z^n$ la función de variable compleja:

$$f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^4}$$

determinando el radio de convergencia y la expresión del coeficiente a_n en función de n. Determine asimismo los residuos de la función y calcule la integral:

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{(1+z^2)^4}$$

donde γ es el camino que en coordenadas polares tiene por ecuación:

$$\rho = \sqrt{|2.\cos 2w|} \qquad 0 \le w \le 2\pi$$

PROBLEMA 008

Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos desde donde se pueden trazar dos tangentes, que formen entre sí ángulo recto, a la curva:

$$x.y^2 = 1$$

Año 2007

(para ver soluciones, http://galeon.com/casanchi/problemas2007.pdf)

PROBLEMA 009

Computar:

1º) $\mathrm{Hom}_z(Z, Z_n)$
2º) $\mathrm{Hom}_z(Z_m, Z_n)$
3º) $\mathrm{Hom}_z(Z_m, Z)$
4º) $\mathrm{Hom}_z(Q, Z)$
5º) $\mathrm{Hom}_z(Q, Q)$

Siendo:

Z: Anillo de los enteros.
Q: Cuerpo de los racionales.
Z_k: Clases de enteros módulo k.
$\mathrm{Hom}_z(A, B)$: Homomorfismos de A en B.

PROBLEMA 010

Sea $g : R^3 \to R^3$ definida por

$$g(x,y,z) = \left(e^{2y} + e^{2z}, e^{2x} - e^{2z}, x - y\right)$$

a) Probar que *g* es diferenciable y posee inversa diferenciable en un entorno de cada punto.
b) Probar que *g* no solo es inyectiva localmente sino que lo es globalmente.
c) Sea *A* el dominio limitado por los planos

x=0, y=0, z=0, y=1, x+z=1

Calcular el volumen de *g(A).*

PROBLEMA 011

Sea P_n el número de permutaciones *u* del conjunto $\{1,2,...,n\}$ tales que $\forall x \in \{1,2,...,n\}$, se cumple la condición de que $u(x) \neq x$.

a) Establecer la relación:

$$n! = P_n + \binom{n}{1}.P_{n-1} + \ldots + \binom{n}{n-2}.P_2 + 1$$

b) Calcular: $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{P_n}{n!}$

PROBLEMA 012

Situar histórica y matemáticamente a GAUSS, CAUCHY, HILBERT, BOURBAKI, COHEN y GALOIS.

(nombre completo, fecha y lugar de nacimiento y fallecimiento, en su caso, y mención resumida de su trabajo)

PROBLEMA 013

Un punto móvil, *M(x,y,z)*, tiene por coordenadas, en función del tiempo *t*:

$$x(t) = (1+m).\cos(1-m).at + (1-m).\cos(1-m).at$$
$$y(t) = (1+m).sen(1-m).at + (1-m).sen(1-m).at$$

Se desea la expresión de *z(t)* sabiendo que el vector velocidad de *M* forma un ángulo igual a *m.a.t* con el eje *OZ.*

PROBLEMA 014

Dado un cuadrilátero completo, se considera el triángulo cuyos vértices son los puntos medios de los lados de uno de los triángulos definidos por tres de los lados del cuadrilátero. Demostrar que dicho triángulo es homológico con el triángulo diagonal y que el eje de homología no depende de la elección del primer triángulo.

PROBLEMA 015

Si *a* es un elemento de un grupo, *(G,.),* sea S_a la permutación del conjunto *G* que a cada *x€G* le asigna el elemento *a.x*. Demostrar que si *G* es de orden par, la permutación S_a es par.

PROBLEMA 016

Como material para realizar experimentos aleatorios se dispone únicamente de dados (con caras numeradas de 1 al 6). Se desea:

a) Enunciar (clara y detalladamente, encerrándola en un recuadro) una regla, lo más sencilla posible, para efectuar un sorteo que permita adjudicar un premio a uno de los 67 jugadores, de modo que todos ellos tengan igual probabilidad de recibirlo.
b) Organizar un juego entre cinco jugadores que efectuarán apuestas iguales; para decidir el resultado de una partida se arrojan p dados iguales (a la vez, de modo que no debe considerarse el orden de los p resultados obtenidos); si dos de los dados presentan números iguales, la partida es nula y los jugadores recuperan sus apuestas; si los p dados presentan resultados diferentes, un solo jugador gana todo lo aportado. Para proceder así hay que elegir un valor conveniente de p y una regla que permita decidir el ganador a partir del resultado obtenido. Dar, en la forma indicada antes, una regla tal, con el valor de p, de modo que el juego resulte equitativo.
c) Problema análogo al caso b) para cuatro jugadores, en lugar de cinco.

PROBLEMA 017

Hallar las superficies en las que se verifique que el punto medio del segmento de normal comprendido entre la superficie y el plano XY está sobre

$$z^2 = x + y$$

PROBLEMA 018

Probar que para que la ecuación con coeficientes reales

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0, \quad a \neq 0$$

tenga todas sus raíces de módulo unidad es necesario y suficiente que se cumpla:

$$\begin{array}{ll} a = e & |4a| \geq |b| \\ b = d & |2a + c| \geq |2b| \\ 8a^2 + b^2 \geq 4ac & 2a^2 + ac \geq 0 \end{array}$$

PROBLEMA 019

Sea 2Z el anillo de los enteros pares.

a) ¿Cuáles son los ideales principales de 2Z?.
b) ¿Cuáles son los ideales primos de 2Z?.
c) ¿Cuáles son los ideales maximales de 2Z?.
d) ¿Todo ideal maximal es primo?.
e) Si es I un ideal maximal de 2Z, ¿es 2Z/I un cuerpo?.

PROBLEMA 020

Desarrollar en serie y estudiar la convergencia de la expresión

$$y = x.arctgx - L\sqrt{1 + x^2}$$

PROBLEMA 021

a) Siendo $a_n(x) = n.x.e^{-nx^2}$ averiguar si

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 a_n(x).dx = \int_0^1 \lim_{n \to +\infty} a_n(x).dx$$

b) Explicar el porqué del resultado obtenido en a).

Año 2008

(para ver soluciones, http://galeon.com/casanchi/problemas2008.pdf)

PROBLEMA 022

Sea la superficie S definida por

$$\begin{aligned} x &= 2z.f(t) - \frac{4}{3}t^3 \\ y &= z.f'(t) - f(t) \end{aligned}$$

c) Comprobar que se trata de una superficie reglada.
d) Hallar *f(t)* para que S sea desarrollable.
e) Pongamos en S que *f(t)=t.* Encontrar en un punto genérico el radio de curvatura y el plano osculador de la curvatura contenida en S y definida por la ecuación $(z - 6t).dt + t.dz = 0$, pasando por *A(t,z)=(1,3).*

PROBLEMA 023

Se supone en R^2 un sistema de referencia ortogonal *OXY*. Hallar la ecuación de la envolvente de los ejes radicales de dos circunferencias *C* y *C′*, donde la circunferencia *C* es fija y tiene su centro en el eje *OY*, y la circunferencia *C′* es variable con centro en *OX* y tangente a la parábola $y^2 = 2x$.

PROBLEMA 024
Se considera la función *f* definida en los intervalos *(0,1)* y (1,+00) por

$$f(x)=\frac{x.Lx}{x^2-1}$$

Se pide:

a) Demostrar que eligiendo convenientemente *f(o)* y *f(1)* la función *f* es continua y derivable para $x\geq 0$.
b) Estudiar la variación de la función y construir su gráfica.

PROBLEMA 025
Sea V es espacio vectorial de las funciones continuas en $[-\pi,\pi]$ y T el endomorfismo de V dado por

$$T(f)(x)=\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos(x-t)).f(t).dt,\quad f(t)\in V$$

Se pide:

a) Probar que *T(V)* es de dimensión finita y hallar una base.
b) Determinar *Ker(T).*
c) Hallar los valores propios y los vectores propios de T.

PROBLEMA 026
Hallar la ecuación de una cuádrica con centro en O*(1,-2,-1)* sabiendo que

d) Tiene un cono asintótico $Y\equiv x^2+y^2+3z^2-4xz=0$.
e) Los puntos *M(1,1,0)* y *N(0,3,1)* son conjugados respecto de ella.

PROBLEMA 027
Sea *f* la función de variable compleja:

$$f(z)=\frac{z^2}{(1+z^2)^2}$$

y *C(0,2)* la circunferencia de centro *0* y radio *2*.
Obtener una expresión del desarrollo de Laurent de f(z) válido en:

a1) El conjunto de los complejos z con $|z|<1$.

a2) Idem con $|z|>1$.

Hallar: $\int_C f(z).dz$

Si g(x) es la función dada por $g(x)=\frac{x^2}{(1+x^2)^2}$, determinar: $\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^2}.dx$

Razonando previamente la convergencia.

PROBLEMA 028

Dada la función $f(x)=\dfrac{K}{1+x^2}$ definida en $(-\infty,+\infty)$, se pide:

a) Determinar *K* para que *f(x)* sea una función de densidad.
b) Hallar la función de distribución.
c) Calcular la probabilidad $p(-2\leq X\leq +2)$.

PROBLEMA 029

Sea (X,T) un espacio topológico, y $f:XxR^2\to R$ una aplicación continua (R y R^2 con la topología usual). Sea p un punto de X, y M el conjunto de R^2 dado por

$$M=\{(x,y)\in R^2, 0\leq x\leq 1, y=0\}$$

d) Si $0\notin f(\{p\}xM)$, estudiar si existe un entorno U de M en R^2 tal que $0\notin f(\{p\}xU)$.
e) Demostrar que el conjunto de puntos $p\in X$ tal que para todo $q\in M$ es $f(p,q)\neq 0$, es abierto en X.

PROBLEMA 030

Se considera la ecuación diferencial

$$y' = máx\{x-2, y\}$$

a) Demostrar la existencia y unicidad de una función definida en *R*, de clase $C^1(R)$, que la satisfaga y verifique la condición $y(0)=0$ sin construirla explícitamente.
b) Hallar la expresión de dicha función solución comprobando que es de clase $C^1(R)$.

PROBLEMA 031

Se corta un tetraedro regular por un plano paralelo a dos aristas opuestas. Describir la figura que forma la sección y hallar en qué situación es máxima su área.

PROBLEMA 032

Los animales de una cierta raza se clasifican en tres clases según que posean dos genes del tipo G (clase de los dominantes, que denotaremos por 1), un gene del tipo G y otro del tipo g (clase de los híbridos, que denotaremos por 2) o dos genes del tipo g (clase de los recesivos, que denotaremos por 3). Se supone que la reproducción en esta raza de animales se hace siempre por cruce con un animal de la clase dominante (y otro de la clase i, para i=1,2,3) y que los hijos heredan siempre un gene de cada padre, con la misma probabilidad (=1/2) en el caso en que pueda ser G ó g.
Denotemos por $p_{i,j}$ la probabilidad de que un animal de la clase j haya sido engendrado por intervención de otro de la clase i. Sea P la matriz $P=(p_{i,j})$, con $i,j=1,2,3$. Denotemos por p_i^{n+1} la probabilidad de que en la generación $n+1$ nazca un animal de la clase *i* y pongamos

$$P^{n+1}=\left(p_1^{n+1},p_2^{n+1},p_3^{n+1}\right)$$

Se pide:

1. Determinar la matriz P^{n+1} en función de n y de la matriz P^1 de la composición probable inicial de la población.

2. Suponiendo que dicha composición inicial sea $p_1^1 = 1/5,\ p_2^1 = 3/5,\ p_3^1 = 1/5$, determinar la composición probable P^{n+1} al cabo de n+1 generaciones. Hallar la composición límite p^{∞} cuando el número de generaciones tiende hacia el infinito.

PROBLEMA 033

Se considera la función de variables compleja

$$f(z) = \left(\frac{z}{1+z^2}\right)^3$$

definida en su dominio de holomorfía en el plano complejo. Se pide:

1) Obtener el desarrollo en serie de potencias de z en un entorno del punto $z = 0$, indicando su campo de convergencia.

2) Obtener el desarrollo en serie de potencias de z en un entorno del punto $z = \infty$ del plano complejo ampliado, indicando su campo de convergencia.

3) Calcular la integral $\int_C f(z).dz$, siendo *C* la circunferencia de centro *0* y radio *2*, recorrida una sola vez en sentido positivo.

PROBLEMA 034

Hallar el área de la porción de superficie definida por las condiciones

$$(x.\cos\alpha + y.sen\alpha)^2 + z^2 = 1,\ \ x \geq 0,\ \ y \geq 0,\ \ z \geq 0 \qquad (0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$$

respecto de un sistema cartesiano de ejes rectangulares en el espacio.

Año 2009

(para ver soluciones, http://galeon.com/casanchi/problemas2009.pdf)

PROBLEMA 035

Se considera la circunferencia que pasa por los puntos P(4,0), Q(0,2) y tiene su centro en la bisectriz del primer cuadrante.

Hállense las ecuaciones de las dos tangentes a la circunferencia trazadas desde el origen de coordenadas.

PROBLEMA 036

Calcular

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sqrt[n]{\left(a+\sqrt{n^2+a^2}\right)\left(2a+\sqrt{n^2+4a^2}\right)...\left(na+\sqrt{n^2+n^2a^2}\right)}$$

PROBLEMA 037

En una urna hay dos bolas, una blanca y la otra negra. Se saca una bola y se devuelve a la urna acompañada de otra del mismo color. Continuando del mismo modo, se llegará a tener en la urna 22 bolas, ¿cuál es la probabilidad de que en ese momento 11 sean blancas y 11 negras?

PROBLEMA 037

Sea f una aplicación continua de un espacio de Haussdorff compacto X en sí mismo. Demostrar que existe un conjunto cerrado $Y \subset X, Y \neq 0$ tal que $f(Y) = Y$.

PROBLEMA 038

Hallar la relación existente entre los coeficientes de las dos ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} z^3 + p_1 z - q_1 &= 0 \\ z^3 + p_2 z - q_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ (ambas con raíces complejas)}$$

Para que los triángulos que determinan los afijos de las raíces de cada una de ellas sean semejantes.

PROBLEMA 039

La longitud de un tornillo se distribuye del siguiente modo:

$$f(x) = \begin{cases} k(x-1)(3-x) & si\ x \in [1,3] \\ 0 & si\ x \notin [1,3] \end{cases}$$

siendo *f(x)* la función de densidad. Sólo son válidos los tornillos comprendidos entre 1'7 y 2'4.
Calcular la probabilidad de que una pieza determinada sea útil.
Si las piezas se empaquetan en lotes de 5 unidades y se acepta el lote si contiene menos de dos piezas defectuosas, ¿cuál es la probabilidad de que un lote sea rechazado?.

PROBLEMA 040

En el plano R^2, con su topología habitual, se consideran los conjuntos

$$A = \{(x,y) \in R^2, x^2 + y^2 = 1\} \text{ y } B = \{(x,y) \in R^2, y = 1\}$$

llamando $X = A \cup B$, sean T_A, T_B y T_X las topologías subordinadas por R^2 respectivamente en A, B y X. Se pide:

1º) Estudiar:

a) Si el conjunto B es cerrado y si es abierto en (X, T_X).
b) Si el conjunto A es entorno de los puntos $P(x=1, y=0)$ y $Q(x=0, y=1)$ en el espacio topológico (X, T_X).
c) Si los espacios (X, T_X) y (A, T_A) son compactos.

2º) Siendo $M = \{(x,y) \in R^2, y = x^2\}$ y $f: R^2 \rightarrow R^2$ es una aplicación continua tal que $f(A) \cap M = \Phi$, demostrar que existe un abierto U de R^2 tal que $A \subset U$ y $f(U) \cap M = \Phi$

PROBLEMA 041

En el espacio euclídeo de 3 dimensiones, y con referencia a tres ejes coordenados rectangulares X, Y, Z, se considera el cilindro que tiene por generatrices rectas paralelas a la recta r de ecuación

$$r \equiv \begin{cases} z = \sqrt{3}x \\ y = 0 \end{cases}$$

y directriz la curva c de ecuación

$$c \equiv \begin{cases} y^2 = 2x \\ z = 0 \end{cases}$$

Determinar las líneas situadas en este cilindro que sean de pendiente máxima respecto del plano z=0.

PROBLEMA 042

Determínense las ecuaciones de las envolventes a los siguientes haces de curvas:

a) $x^2 = p.(2y - p)$ $\quad p$: parámetro

b) $x^2 + (y - q)^2 = q$ $\quad q$: parámetro

c) $x^2 + y^2 - \dfrac{r^2}{2}x - 2ry = 0$ $\quad r$: parámetro

PROBLEMA 043

Integrar, por desarrollo en serie, la ecuación diferencial:

$$y' = x^2 + y$$

PROBLEMA 044

Un buque de carga, navegando 200 horas entre dos puntos situados en el Ecuador, ha recorrido 32º15'30". Se pide:

1º. Calcular en millas por hora la velocidad del barco (la milla es 1' de arco aproximadamente).

2º. Diferencia de horas en ambos puertos.

3º. El capitán conserva un reloj con la hora del puerto de partida y en un momento determinado se da cuenta de que está atrasado 20 minutos con la hora justa del punto en que se halla. ¿Qué diferencia de longitud existe entre aquel puerto y este punto?.

PROBLEMA 045

Dada la cónica $x^2 - y^2 - 1 = 0$. Se pide:

La matriz de dicha cónica.

La recta polar del punto *P(3,1)*.

Calcular *a* para que el punto *Q(a,2)* sea conjugado de *P(3,1).*

Determinar el polo de la recta *y=2x+1*.

PROBLEMA 046

Hallar el área de la superficie engendrada al girar un arco de cicloide

$$\begin{cases} x = a.(t - sent) \\ y = a.(1 - \cos t) \end{cases}$$

alrededor de su eje de simetría.

Año 2010

(para ver soluciones, http://galeon.com/casanchi/problemas2010.pdf)

PROBLEMA 047

Clasificar la cónica siguiente

$$13.x^2 + 5.y^2 + 4.xy - 26.x - 22y + 23 = 0$$

Obtener su ecuación reducida y representarla en un diagrama cartesiano.

PROBLEMA 048

Determinar los puntos singulares de las curvas siguientes:

a) $(x_2 - 1)^3 + (x_2 - 1)^2 - (x_1 + 1)^2 = 0$
b) $x_2^2 - x_1^3 = 0$

PROBLEMA 049

Ecuación de la superficie que contiene a la hipèrbola:

$$\begin{cases} y^2 + z^2 = x^2 \\ z = 1 \end{cases}$$

y que satisface la ecuación diferencial

$$xy(p-q) = (x-y)z$$

$$(\, p = dz/dx, \;\; q = dz/dy)$$

PROBLEMA 050

Calcular los valores de: a) $L(-4)$, b) Li, c) $L(1+i)$, d) $\log_{-1}(i)$.

PROBLEMA 051

Determinar una curva que pasa por el punto (3,2) y para la cual la longitud del segmento de cualquiera de sus tangentes comprendido entre los ejes de coordenadas está dividido por el punto de contacto en dos partes iguales.

PROBLEMA 052

Sean r y r' dos rectas perpendiculares y sea D su punto de intersección. Sobre r tomamos un punto A fijo y sobre r' dos puntos M y N variables de modo que $DM.DN=c^2$. Se trazan las perpendiculares a las rectas AM y AN por los puntos M y N respectivamente.

Determinar el lugar geométrico del punto X de intersección de dichas perpendiculares.

PROBLEMA 053

Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Se pide calcular:

1) Los autovalores.
2) Los autovectores.
3) La matriz diagonal semejante, si existe.

PROBLEMA 054

Sea X una variable aleatoria cuya Función de Distribución es la siguiente

$$F(x) = \begin{cases} 0 & para\ x \le -2 \\ x/4 + 1/2 & para\ -2 < x \le 2 \\ 1 & para\ x > 2 \end{cases}$$

Se pide calcular:

4) La esperanza matemática de X.
5) La varianza.
6) $p[X \le 1]$.
7) $p[1 < X \le 2]$
8) $p[X > 3]$

PROBLEMA 055

Hallar la descomposición canónica de la función

$$f : Q \to Q$$

Definida del siguiente modo: $f(x) = [x]$, donde $[x]$ representa el máximo número entero menor o igual a x.

PROBLEMA 056

1) Hallar la ecuación de las superficies cuyo plano tangente en cada punto corte al eje OZ en un punto de cota igual y de signo contrario a la cota del punto de contacto.

2) Determinar entre estas superficies la que contiene a la hipérbola equilátera

PROBLEMA 057

1) Defínase derivada direccional y las superficies equipotenciales.
2) Hallar la derivada direccional de $F = x^2yz^3$ a lo largo de la curva

$$x = e^{-u}$$
$$y = 2senu + 1$$
$$z = u - \cos u$$

3) Demostrar que la máxima variación de F, es decir, la máxima derivada direccional, se verifica en la dirección del vector $\vec{\nabla}F$ y tiene su magnitud.
4) Hallar la derivada direccional de $U = 2x^3y - 3y^2z$ en $P(1,2,-1)$ en una dirección hacia $Q(3,-1,5)$. ¿En qué dirección a partir de P es máxima la derivada direccional?. ¿Cuál es la magnitud de la derivada direccional máxima?

PROBLEMA 058

Sean X e Y espacios topológicos.

a) Demostrar que si $f : X \to Y$ es una función constante, por ejemplo $f(x) = c \in Y, \forall x \in X$, entonces f es continua respecto a cualquier topología τ del espacio X y a cualquier topología τ^* del espacio Y.
b) Demostrar que si $f : X \to Y$ es una función cualquiera y (Y,γ) es un espacio topológico indiscreto, entonces $f : (X,\tau) \to (Y,\gamma)$ es continua, cualquiera que sea la topología τ.

PROBLEMA 059

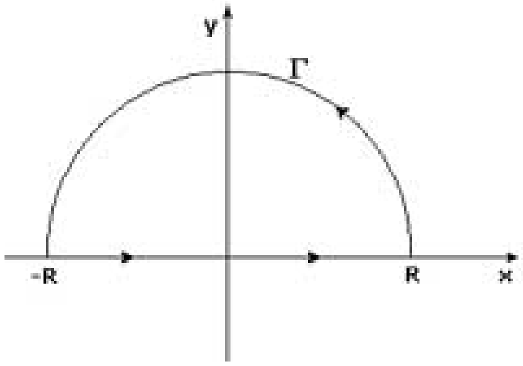
a) Hallar la tabla de multiplicar de S_3, grupo simétrico del conjunto $X = \{1,2,3\}$.
b) Probar que $R = \{i, \sigma_1, \sigma_2\}$ es subgrupo de S_3, siendo

$$i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Año 2011

(para ver soluciones, http://galeon.com/casanchi/problemas2011.pdf)

PROBLEMA 060 (220111)



a) Si $|f(z)| \leq \frac{M}{R^k}$, para $z = R.e^{i\theta}$,
donde k>1 y M son constantes, demostrar que

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma} f(z).dz = 0$$

siendo Γ el arco semicircular de la figura.

b) Calcular: $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4+1}$

PROBLEMA 061 (190211)

Calcular la integral

$$\int_C y^2 dx + x^2 dy$$

donde C es la mitad superior de la elipse

$$\begin{cases} x = a.\cos t \\ y = b.sen\, t \end{cases}$$

que se recorre en el sentido de las agujas del reloj.

PROBLEMA 062 (190311)

a) Indíquese la manera de integrar ecuaciones diferenciales de primer orden con variables separables.
b) Intégrense las ecuaciones diferenciales siguientes:

1) $y' = (x+1).y$

2) $\frac{\cos x}{1+e^y} dx + 2dy = 0$

PROBLEMA 063 (160411)

Determinar la distancia existente entre los dos puntos A y B de la superficie terrestre que se indican mediante sus coordenadas geográficas (la primera es la longitud y la segunda la latitud): $A(-13^o, 0^o)$, $B(17^o, 45^o)$.

PROBLEMA 064 (140511)

Demostrar que los números *49, 4489, 444889, ...,* obtenidos colocando el número *48* en medio del número anterior, son cuadrados de números enteros.
(propuesto en 1988, XXV Olimpiada Matemática, fase de Sevilla, España)

PROBLEMA 065 (110611)

Determinar en función de b>1 el valor de la integral:

$$\varphi(b) = \int_0^b |x-1|.\cos x.dx$$

PROBLEMA 066 (090711)

Demostrar que si la ecuación de cuarto grado $x^4 + mx^2 + n = 0$ tiene cuatro raíces distintas en progresión geométrica, entonces el coeficiente m es nulo.

PROBLEMA 067 (060811)

a) Para la variable aleatoria X, y la función de densidad en *(a,b)* dada por $f(x) = \frac{1}{b-a}$, calcular la esperanza matemática *E[X]* (momento central de primer orden), el momento central de orden k y la varianza.

b) Probar que si la función de densidad es $f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}, \forall x \in R,$ entonces no existe la esperanza matemática *E[X]*.

PROBLEMA 068 (030911)

Encontrar dos números impares de dos cifras tales que si se permutan sus cifras resultan dos números distintos, y, sin embargo, su producto coincide con el producto de los dos primeros.
Propuesto en la Olimpiada Matemática Española 1988, fase de Sevilla.

PROBLEMA 69 (011011)

En un cubo de arista *a* se considera una diagonal *D* del mismo y la diagonal *d* de una de sus caras, de modo que las rectas que contienen los segmentos *D* y *d* se crucen. Hallar la distancia *x* de *D* a *d*.

PROBLEMA 70 (291011)

Sea n un nº natural. Probar que el último dígito del nº *1+2+3+…+n* nunca podrá ser *2, 4, 7* o *9*.
(Olimpiada Matemática Española, 1977)

PROBLEMA 71 (261111)

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{d^2x}{dt^2}-2\dfrac{dy}{dt}+3x=0\\ \dfrac{d^2x}{dt^2}+\dfrac{dx}{dt}-2y=e^{2t}\end{array}\right\}$$

PROBLEMA 72 (241211)

Sea un espacio topológico compacto (X,T) y una aplicación continua

$$f:(X,T)\to(Y,T')$$

Demuéstrese que $f(X)$ es compacto y que, en particular, si f es además sobreyectiva, entonces Y es también compacto.