# MOVIMIENTO DE LA PARTÍCULA



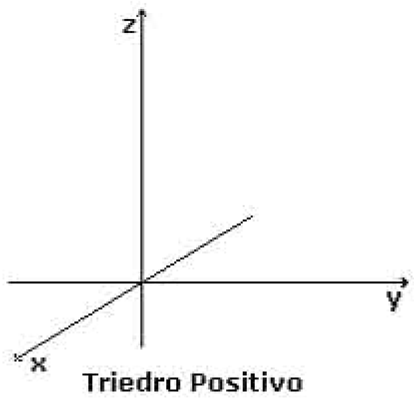
---oo0oo---

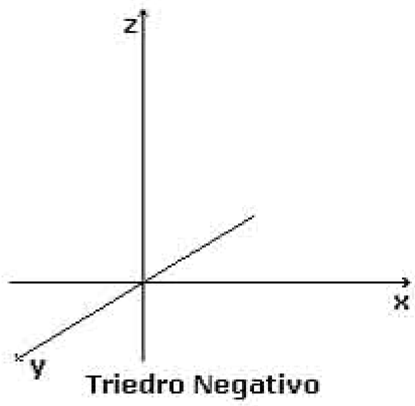
**SEVILLA, 2004**

## 1. Movimiento rectilíneo:

Para la descripción del movimiento es necesario, en primer lugar, establecer un sistema de referencia cartesiano tridimensional, constituido por tres ejes perpendiculares.

Con respecto a la nomenclatura de los ejes, los llamaremos x, y, z, o $x_1$, $x_2$, $x_3$. Puede referirse en ese orden natural (triedro trirrectángulo positivo o directo) o bien en un orden distinto del natural (triedro trirrectángulo negativo). El convenio habitual es el del triedro positivo.



### 1.1. Velocidad:

Se define la velocidad promedio, o velocidad media, en un intervalo de tiempo dado como la distancia recorrida dividida por la duración del intervalo

Distancia recorrida en el intervalo $\Delta t = t_2 - t_1 \dashrightarrow \Delta x = x_2 - x_1$.
Velocidad promedio: $v = \Delta x/\Delta t$

La velocidad instantánea se define por la derivación temporal del espacio recorrido:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

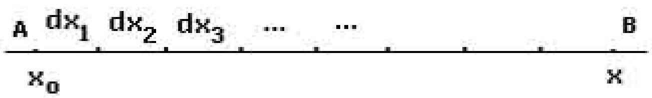
La velocidad será positiva si el desplazamiento se produce hacia la derecha, en el sentido positivo del eje x, y será negativa si se produce en sentido contrario.

El problema de conocer la posición del móvil cuando se conoce la expresión de la velocidad instantánea, se resuelve con la operación inversa de la derivación, es decir integrando la expresión de la misma:

$$\frac{dx(t)}{dt} = v(t) \Rightarrow dx(t) = v(t).dt \Rightarrow x(t) - x(t_o) = \int_{t_o}^{t} v(t).dt$$

donde es $x(t_o)$ el espacio recorrido en el instante inicial, $t_o$, del intervalo de integración, que suponemos conocido.

Esta integral representa, pues, una suma infinita, la suma infinita de todas las velocidades promedio infinitesimales a lo largo del intervalo temporal que se considera en la integral.




Así, pues, $x - x_o = dx_1 + dx_2 + ... = v_1.dt_1 + v_2.dt_2 + ... = \int_{t_o}^{t} v(t).dt$

Ejemplo 1:

Si es $x(t) = 5.t^2+1$, se tiene que $v(t) = 10t$, y en el instante inicial ($t=0$) es $x(t=0) = x_o = 1$ y $V(t=0) = v_o = 0$

Ejemplo 2:

Para $v(t) = 10.t + 1$, con $x(t=0)=x_o = 5$, se tiene que es

$$x(t) - x_o = \int_{t_o}^{t} v(t).dt = \int_{0}^{t} (10t+1).dt = 5.t^2 + t \Rightarrow x(t) - 5 = 5.t^2 + t \Rightarrow x(t) = 5t^2 + t + 5$$

¿En qué momento el móvil tenia velocidad nula?. Veamos: $v(t)=0$ implica que $10.t+1 = 0$, o sea, que $t = -1/10 = -0.1$.

Esto quiere decir que para $t>0,1$ la velocidad resulta ser positiva ($v>0$), desplazándose el móvil hacia la derecha, mientras que para $t<0,1$ la velocidad es negativa ($v<0$) y el móvil se desplaza hacia la izquierda.

### 1.2. Aceleración:

Se define la aceleración promedio, o aceleración media, en un intervalo de tiempo dado como la variación de velocidad en los extremos del intervalo dividida por la duración del intervalo

Variación de la velocidad en los extremos del intervalo $\Delta t = t - t_o$ --> $\Delta v = v - v_o$.

Aceleración promedio: $\overline{a} = \dfrac{v - v_o}{t - t_o} = \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$

La aceleración instantánea se define como la derivación temporal de la velocidad instantánea:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

El proceso, pues, de cálculo de las magnitudes cinemáticas es el siguiente:

X(t) --> v(t) --> a(t)

Necesitándose $x(t_o)$ para determinar la velocidad, y también $v(t_o)$ para determinar la aceleración.

Se tiene, en definitiva, que, para calcular la velocidad instantánea necesitamos el valor de x, espacio recorrido, en el instante inicial $t_o$, mientras que para calcular la aceleración instantánea necesitamos también la velocidad instantánea en ese instante $t_o$.

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} \Rightarrow dv(t) = a(t).dt \Rightarrow \int_{t_o}^{t} dv(t) = \int_{t_o}^{t} a(t).dt \Rightarrow v(t) - v(t_o) = \int_{t_o}^{t} a(t).dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v(t) = v(t_o) + \int_{t_o}^{t} a(t).dt = v(t_o) + f(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

y obtenemos también el espacio recorrido x(t):

$$dx(t) = (v(t_o) + f(t)).dt \Rightarrow \int_{t_o}^{t} dx(t) = \int_{t_o}^{t} (v(t_o) + f(t)).dt = v(t_o).(t - t_o) + \int_{t_o}^{t} f(t).dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(t) - x(t_o) = v(t_o).(t - t_o) + \int_{t_o}^{t} f(t).dt \Rightarrow x(t) = x(t_o) + v(t_o).(t - t_o) + \int_{t_o}^{t} f(t).dt$$

Otras expresiones:

$$a(x) = \frac{dv(t)}{d(t)} \Rightarrow v(t).a(x) = v(t).\frac{dv(t)}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{dt} a(x) = v(t).\frac{dv(t)}{dt} \Rightarrow a(x).dx = v(t).dv(t)$$

integrando:

$$\int_{x_o}^{x} a(x).dx = \int_{v_o}^{v} v(t).dv(t) = \frac{1}{2} v(t)^2 \Big|_{v_o}^{v} = \frac{1}{2}\left(v(t)^2 - v(t_o)^2\right)$$

llamando $f(x) = \int_{x_o}^{x} a(x).dx$, se tiene:

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(v(t)^2 - v(t_o)^2\right) \Rightarrow v(t)^2 = v(t_o)^2 + 2.f(x)$$

por tanto:

$$v(t) = \sqrt{v(t_o)^2 + 2.f(x)}$$

Puede tenerse también una expresión para el tiempo en función de la velocidad desde la definición de velocidad instantánea:

$$v(x) = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dt = \frac{dx}{v(x)} \Rightarrow \int_{t_o}^{t} dt = \int_{x_o}^{x} \frac{dx}{v(x)} \Rightarrow t = t_o + \int_{x_o}^{x} \frac{dx}{v(x)}$$

Para poder obtener la función $f(t) = \int_{t_o}^{t} a(t).dt$ hemos de conocer la expresión de a(t). Veamos como caso particular el caso gravitatorio, en donde a = const = g

Ejemplo 1:

El campo gravitatorio a una altura h está dado por la expresión siguiente

$$g = G\frac{M}{r^2} = G\frac{M}{(R+h)^2}$$

donde es R el radio del planeta. Si la altura h fuera despreciable en comparación con R, esto es, si h<<R, entonces, podemos escribir para puntos muy próximos a la superficie de la Tierra:

$$g = G\frac{M}{r^2} \approx G\frac{M}{R^2}$$

Supongamos un objeto sometido a la aceleración g de forma que $v(t=t_o)=v_o$, y que $x(t=t_o)=x_o$. Se tiene:

$$v(t) = v(t_o) + f(t) = v(t_o) + \int_{t_o}^{t} g.dt = v(t_o) + g.(t - t_o)$$

asimismo:

$$x(t) = x(t_o) + v_o.(t - t_o) + \frac{1}{2}g.(t - t_o)^2$$

y para el caso de que $t_o = 0$, $x_o = 0$, $v_o = 0$, se tiene que *v(t)=g.t, x(t)=1/2.g.t²*.

también, la expresión de la velocidad será, en estas condiciones $v = \sqrt{2g.x}$ , por lo que, usando la expresión del tiempo obtenida antes, podemos escribir:

$$t = \int_0^x \frac{dx}{v} = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{2gx}} = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{2g}}2\sqrt{x} = \sqrt{\frac{x}{2g}} \Rightarrow t^2 = \frac{4x}{2g} \Rightarrow x = \frac{1}{2}gt^2$$

Ejemplo 2:

Supongamos ahora que el objeto se mueve hacia arriba, esto es, en sentido contrario a la aceleración g, o, dicho de otra manera, sufre una aceleración negativa o deceleración que acabará deteniendo su movimiento:

Las fórmulas anteriores será, para este caso, de la forma:

$$v(t) = v(t_o) + (-g).(t - t_o)$$

$$y(t) = y(t_o) + v_o.(t - t_o) + \frac{1}{2}(-g).(t - t_o)^2$$

Supongamos que parte desde una altura $y_o$ = h hacia arriba, en el instante $t_o$ = 0, se tendrá entonces que:

$$v(t) = v(t_o) - g.t$$

$$y(t) = h + v_o.t - \frac{1}{2}g.t^2$$

Tiempo t' que tarda en alcanzar la máxima altura $y_{max}$:

$$v(t') = v_o - g.t' = 0 \Rightarrow t' = {v_o}/{g}$$

Cálculo de la altura máxima alcanzada en el tiempo t':

$$y_{\max} = h + v_o t' - \frac{1}{2}g.t'^2 = h + \frac{v_o^{\,2}}{g} - \frac{1}{2}g.\left(\frac{v_o}{g}\right)^2 = h + \frac{1}{2g}v_o^{\,2}$$

Tiempo t" que tarda en caer desde la altura máxima:

En este caso es $v_o$ = 0, $y_o$ = 0, $t''_o$ = 0. Se tiene: $y_{\max} = \frac{1}{2}g.t''^2 \Rightarrow t'' = \sqrt{\frac{2y_{\max}}{g}}$

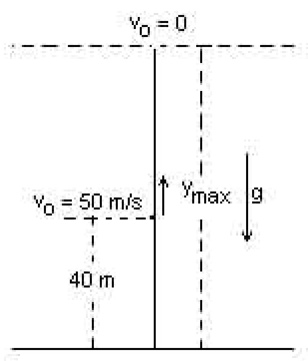
Velocidad del impacto contra el suelo: $v(t'') = g.t'' = g.\sqrt{\frac{2y_{\max}}{g}} = \sqrt{2.g.y_{\max}}$

Tiempo que tarda en caer al suelo desde el momento de su lanzamiento hacia arriba:

$$t_{total} = t' + t'' = \frac{v_o}{g} + \sqrt{\frac{2y_{\max}}{g}}$$

Determinación con números:

Sea h= 40 m, $v_o$ = 50 m/s, g = 9,8 m/s$^2$. Se tiene:




t' = 50/9,8 = 5,10 s

$V_{max}$ = 40+1/2.9,8.50$^2$ = 167,55 m

t" = 5,84 s

v(t") = 57,30 m/s

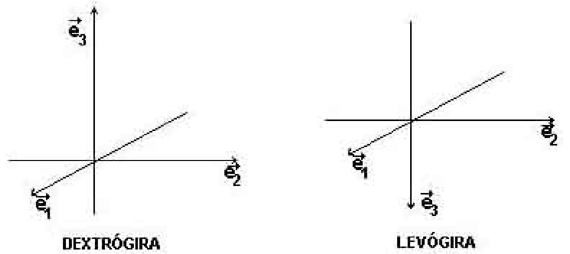
$t_{total}$ = t'+t" = 10,94 s

## 2. Movimiento curvilíneo:

### 2.1. Descripción:

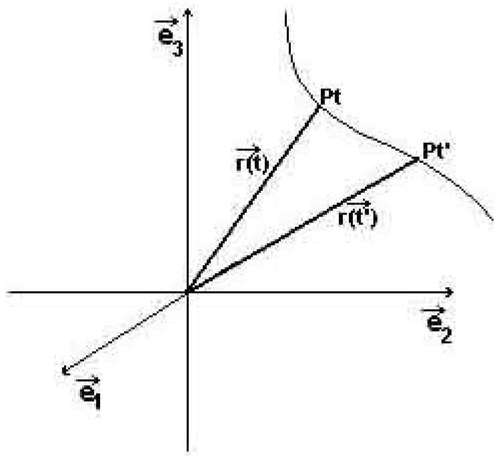
Para describir el movimiento curvilíneo en el espacio tridimensional necesitamos un sistema de referencia adecuado, esto es, una base de tres vectores y un origen de referencia.

Si llamaos e1, e2, e3 a los tres vectores unitarios de la base, podemos representarlos gráficamente así:




La base será dextrógira si el vector $e_3$ está dirigido en sentido hacia arriba, y levógira si tiene el sentido contrario.

La representación del vector de posición de una partícula en el sistema de referencia R{O, B} donde es O el origen y B es la base de los tres vectores unitarios, es inmediata:




Se tiene:

$$\vec{r}(t) = x_1(t).\vec{e}_1 + x_2(t).\vec{e}_2 + x_3(t).\vec{e}_3 = \sum_{j=1}^{3} x_j(t).\vec{e}_j$$

$$\vec{r}(t') = x_1(t').\vec{e}_1 + x_2(t').\vec{e}_2 + x_3(t').\vec{e}_3 = \sum_{j=1}^{3} x_j(t').\vec{e}_j$$

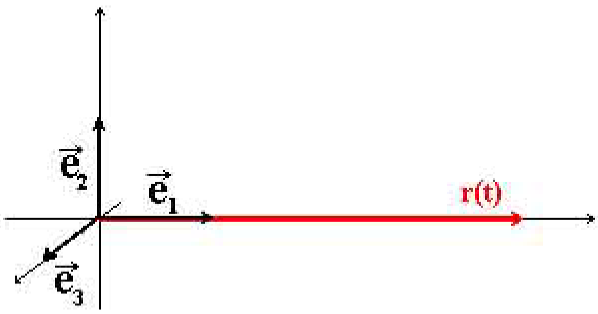
Las coordenadas de cada punto P de la trayectoria son los números $x_j$ que se obtienen mediante el producto escalar del vector de posición por cada uno de los vectores de la base:

$x_j(t) = \vec{r}(t).\vec{e}_j$, ya que $\vec{r}(t).\vec{e}_j = |\vec{r}(t)|.|\vec{e}_j|.\cos\theta = |\vec{r}(t)|.\cos\theta$

$$Pt ---> (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$$
$$Pt' ---> (x_1(t'), x_2(t'), x_3(t'))$$

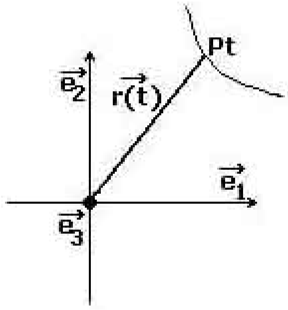
Si las componentes $x_j(t)$ no dependen del tiempo, se dice que la partícula está en reposo.

Si solamente una de las componentes depende del tiempo, por ejemplo, $x_1(t)$, se dice que la partícula se mueve en una línea recta:




$$\vec{r}(t) = x_1(t).\vec{e}_1 \qquad P_1 t \rightarrow (x_1(t),0,0)$$

Si son dos las componentes que dependen del tiempo, por ejemplo, $x_1(t)$ y $x_2(t)$, la partícula se mueve en un plano:

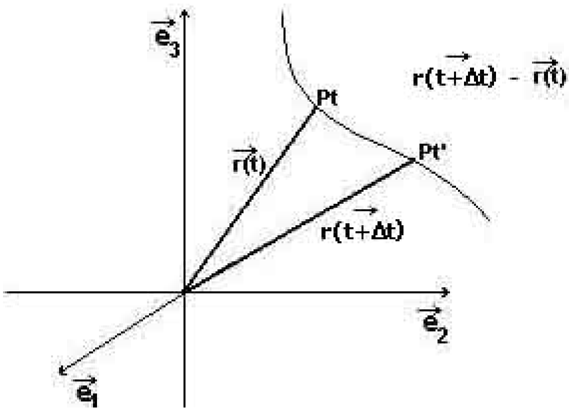



$$\vec{r}(t) = x_1(t).\vec{e}_1 + x_2(t).\vec{e}_2 \qquad P_1 t \rightarrow (x_1(t), x_2(t),0)$$

## 2. 2. Velocidad y aceleración:

Velocidad de una partícula:

Es una medida de lo rápido que cambia en el tiempo su vector de posición.




$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \dot{\vec{r}}(t) = \dot{x}_1(t).\vec{e}_1 + \dot{x}_2(t).\vec{e}_2 + \dot{x}_3(t).\vec{e}_3$$

por tanto: $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \sum_{j=1}^{3} \dot{x}_j(t).\vec{e}_j$

Aceleración:

Se tiene, al variar la velocidad:

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \dot{\vec{r}}(t) = \dot{v}_1(t).\vec{e}_1 + \dot{v}_2(t).\vec{e}_2 + \dot{v}_3(t).\vec{e}_3 =$$
$$= \ddot{x}_1(t).\vec{e}_1 + \ddot{x}_2(t).\vec{e}_2 + \ddot{x}_3(t).\vec{e}_3$$

¿Cómo varía la aceleración con el tiempo?:

$$\vec{a}(t) = a_1(t).\vec{e}_1 + a_2(t).\vec{e}_2 + a_3(t).\vec{e}_3$$

Obtenemos la velocidad en función de la aceleración:

$$\dot{\vec{v}}(t) = \vec{a}(t) \Rightarrow \int_{t_o}^{t} \dot{\vec{v}}(t').dt' = \int_{t_o}^{t} \vec{a}(t').dt' \Rightarrow \int_{t_o}^{t} dv(t') = \int_{t_o}^{t} \vec{a}(t').dt' \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \vec{v}(t) - \vec{v}(t_o) = \int_{t_o}^{t} \vec{a}(t').dt'$$

$$\boxed{\vec{v}(t) = \vec{v}(t_o) + \int_{t_o}^{t} \vec{a}(t').dt' = \vec{v}(t_o) + \sum_{j=1}^{3} \int_{t_o}^{t} a_j(t').\vec{e}_j.dt'}$$

[*]

Análogamente, obtenemos el vector de posición en función de la velocidad:

$$\dot{\vec{r}}(t) = \vec{v}(t) \Rightarrow \int_{t_o}^{t} \dot{\vec{r}}(t').dt' = \int_{t_o}^{t} \vec{v}(t').dt' \Rightarrow \int_{t_o}^{t} d\vec{r}(t') = \int_{t_o}^{t} \vec{v}(t').dt' \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \vec{r}(t) - \vec{r}(t_o) = \int_{t_o}^{t} \vec{v}(t').dt'$$

$$\boxed{\vec{r}(t) = \vec{r}(t_o) + \int_{t_o}^{t} \vec{v}(t').dt' = \vec{r}(t_o) + \sum_{j=1}^{3} \int_{t_o}^{t} v_j(t').\vec{e}_j.dt'}$$

[**]

Si sustituimos en [**] la expresión [*] de la velocidad, se tiene:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_o) + \int_{t_o}^{t} \vec{v}(t').dt' = \vec{r}(t_o) + \int_{t_o}^{t} \left[ \vec{v}(t_o) + \int_{t_o}^{t'} \vec{a}(t'').dt'' \right].dt' =$$
$$= \vec{r}(t_o) + (t - t_o).\vec{v}(t_o) + \int_{t_o}^{t} .dt' \int_{t_o}^{t'} dt''.\vec{a}(t'')$$

En definitiva, se obtiene [***]:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_o) + (t - t_o).\vec{v}(t_o) + \int_{t_o}^{t} .dt' \int_{t_o}^{t'} dt''.\vec{a}(t'')$$

### 2.3. Movimiento con aceleración constante:

Movimiento de una partícula bajo aceleración constante:

Si es $\vec{a}(t) = \vec{a}$ :

De [**] se tiene: $$\vec{v}(t) = \vec{v}(t_o) + \int_{t_o}^{t} dt'.\vec{a} = v(t_o) + (t - t_o).\vec{a}$$

Y también se tiene de [***]:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_o) + (t - t_o).\vec{v}(t_o) + \int_{t_o}^{t} .dt' \int_{t_o}^{t'} dt''.\vec{a}(t'') = \vec{r}(t_o) + (t - t_o).\vec{v}(t_o) + \int_{t_o}^{t} \vec{a}(t' - t_o).dt'$$

O sea:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_o) + (t - t_o).\vec{v}(t_o) + \frac{1}{2}.\vec{a}(t - t_o)^2$$

En el caso de aceleración constante pueden darse esta situaciones: 1) que la aceleración sea cero, 2) que sea constante no nula y paralela a la velocidad, y 3) que sea constante no nula y no paralela a la velocidad.

1) En el caso de que la aceleración fuera nula (movimiento rectilíneo y uniforme):

$$\vec{v}(t) = v(t_o) + (t - t_o).0 = v(t_o)$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_o) + (t - t_o).\vec{v}(t_o) + \frac{1}{2}.0.(t - t_o)^2 = \vec{r}(t_o) + (t - t_o).\vec{v}(t_o)$$

Naturalmente, si también fuera $v(t_o)=0$, la partícula estaría en reposo.

2) Si la aceleración es constante y paralela a la velocidad, se tiene que son vectores proporcionales, esto es, existe alguna constante K con la que se puede escribir la proporción:

$$\vec{v}(t_o) = K.\vec{a}$$

Con lo cual se tiene:

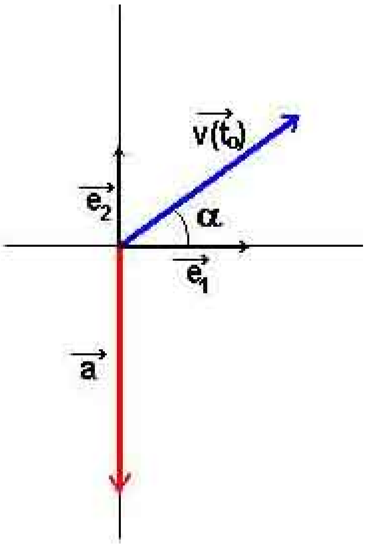
$$\vec{v}(t) = \vec{v}(t_o) + (t - t_o).\vec{a} = K.\vec{a} + (t - t_o).\vec{a}$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_o) + (t - t_o).\vec{v}(t_o) + \frac{(t - t_o)^2.\vec{a}}{2} = \vec{r}(t_o) + \left[ (t - t_o).K.\vec{a} + \frac{(t - t_o)^2.\vec{a}}{2} \right]$$

Por tanto:

$$\vec{v}(t) = [K + (t - t_o)].\vec{a}$$
$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_o) + \left[(t - t_o).K + \frac{(t - t_o)^2}{2}\right].\vec{a}$$

3) Si la aceleración es constante pero no paralela a la velocidad:




Supongamos que se da la situación de la figura, donde hemos hecho coincidir la aceleración constante con el sentido negativo de uno de los ejes.

El vector unitario correspondiente será:

$$\vec{e}_2 = \frac{-\vec{a}}{|\vec{a}|} \Rightarrow \vec{a} = -|\vec{a}|.\vec{e}_2$$

Veamos cómo determinar los vectores velocidad y de posición en función del ángulo que forma la dirección de la velocidad inicial con el eje horizontal.

Es decir, de la figura, se tiene que

$$\vec{v}(t_o) = |\vec{v}(t_o)|.(\cos\alpha.\vec{e}_1 + sen\,\alpha.\vec{e}_2), \qquad \vec{a} = -|\vec{a}|.\vec{e}_2$$

Siendo nulas obviamente las otras dos componentes de la aceleración.

por tanto, de la expresión del vector velocidad obtenido antes:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(t_o) + \vec{a}.(t - t_o) = |\vec{v}(t_o)|.(\cos\alpha.\vec{e}_1 + sen\alpha.\vec{e}_2) - |\vec{a}|.(t - t_o)\vec{e}_2 =$$
$$= |\vec{v}(t_o)|\cos\alpha.\vec{e}_1 + [|\vec{v}(t_o)|sen\alpha - |\vec{a}|.(t - t_o)]\vec{e}_2$$

y la tercera componente de la velocidad es evidentemente nula, por desarrollarse el movimiento en un solo plano.

La expresión del vector de posición será:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_o) + \vec{v}(t_o).(t - t_o) + \frac{\vec{a}.(t - t_o)^2}{2} = [x_1(t_o) + (t - t_o).|\vec{v}(t_o)|.\cos\alpha].\vec{e}_1 +$$
$$+ \left[x_2(t_o) + (t - t_o).|\vec{v}(t_o)|.sen\alpha - \frac{|\vec{a}|.(t - t_o)^2}{2}\right].\vec{e}_2 + x_3(t_o).\vec{e}_3$$

La tercera componente del vector de posición se mantiene invariante en el movimiento ($x_3(t)=x_3(t_o)$)

En cuanto a las otras dos, han resultado ser, en función del tiempo:

$$x_1(t) = x_1(t_o) + (t - t_o).\left|\vec{v}(t_o)\right|.\cos\alpha$$

$$x_2(t) = x_2(t_o) + (t - t_o).\left|\vec{v}(t_o)\right|.sen\alpha - \frac{\left|\vec{a}\right|.(t - t_o)^2}{2}$$

Eliminando el tiempo (t-t$_o$) entre ambas, se tiene:

$$t - t_o = \frac{x_1(t) - x_1(t_o)}{\left|\vec{v}(t_o)\right|.\cos\alpha}$$

$$x_2(t) - x_2(t_o) = (x_1(t) - x_1(t_o)).tg\alpha - \frac{\left|\vec{a}\right|.(x_1(t) - x_1(t_o))^2}{2.\left|\vec{v}(t_o)\right|^2.\cos^2\alpha}$$

Que es la ecuación de una parábola, pues es de la forma:

$$y = Ax - Bx^2$$

donde los coeficientes son de la forma:

$$A = tg\alpha$$

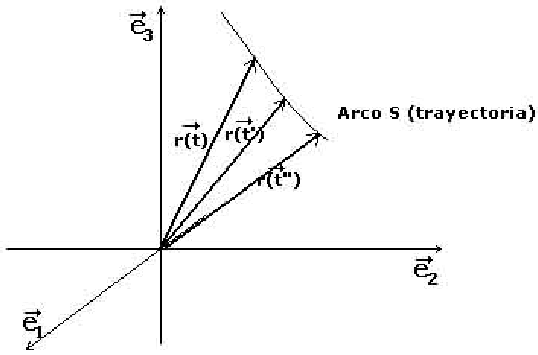
$$B = -\frac{\left|\vec{a}\right|}{2.\left|\vec{v}(t_o)\right|^2.\cos^2\alpha}$$

## 2.4. Componentes intrínsecas. Tangencial y normal:

Para estudiar las componentes tangencial (en el sentido del movimiento) y normal (en sentido perpendicular) es necesario analizar el cambio de parametrización desde el tiempo, que hemos utilizado hasta ahora, al parámetro longitud de arco, que llamaremos *parametrización natural*.

Componentes intrínsecas:

Consideremos, en efecto, que una partícula sigue una trayectoria cualquiera en el espacio tridimensional $R^3$, con un vector de posición para cada instante t:



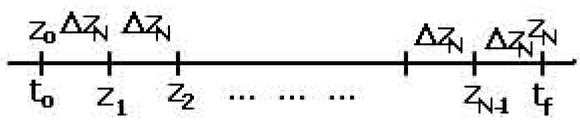

Así, a cada instante t del intervalo del movimiento $[t_o, t_f]$ le corresponde un vector del espacio tridimensional.

$$\vec{r}(t) : [t_o, t_f] \to R^3$$
$$\forall t \in [t_o, t_f],\ \vec{r}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \in R^3$$

¿Cómo establecer la parametrización natural a partir de la parametrización temporal utilizada hasta ahora?

Veamos que podemos subdividir el intervalo temporal $[t_o, t_f]$ en N subintervalos iguales, cada uno de ellos con la longitud $\Delta z_N$, mediante puntos $z_1, z_2, \ldots, z_j, \ldots$

$$\Delta z_N = \frac{t_f - t_o}{N}, \quad z_j = t_o + j.\Delta z_N \ , \quad j = 0,1,2,\ldots,N$$




Esto quiere decir que los valores del radio vector en cada uno de los puntos $z_j$ definen una línea poligonal de tramos rectos cuyas longitudes vienen dadas por

$$|\vec{r}(z_1) - \vec{r}(z_o)|,\ |\vec{r}(z_2) - \vec{r}(z_1)|,\ \ldots,\ |\vec{r}(z_N) - \vec{r}(z_{N-1})|$$

y la longitud total en el intervalo dado:

$$L_N = \sum_{j=o}^{N-1} \left| \vec{r}(z_{j+1}) - \vec{r}(z_j) \right| = \sum_{j=o}^{N-1} \left| \vec{r}(z_j + \Delta Z_N) - \vec{r}(z_j) \right|$$

Dicha poligonal puede hacerse coincidir con el arco S de la trayectoria cuando el número de intervalos N se hace infinito (o bien cuando la longitud de cada subintervalo $\Delta z_N$ tiende a ser nula).

$$S(t_o, t_f) = \lim_{\substack{N \to \infty \\ \Delta z_N \to 0}} \sum_{j=o}^{N-1} \left| \frac{\vec{r}(z_j + \Delta Z_N) - \vec{r}(z_j)}{\Delta z_N} \right| .\Delta z_N = \int_{t_o}^{t} dt. \left| \vec{v}(t') \right|$$

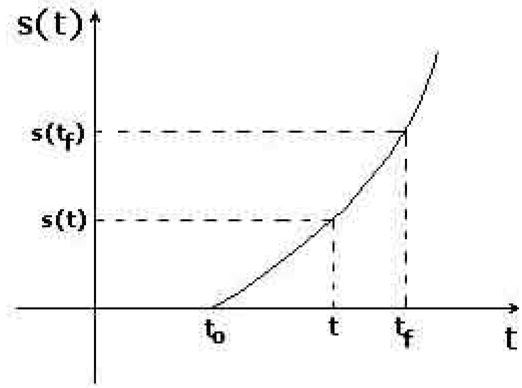
En definitiva, se puede escribir, considerando que $t_o$ es fijo:

$$s(t) = \int_{t_o}^{t} \left| \vec{v}(t') \right| dt' \text{, función monótona creciente}$$

y en forma diferencial ha de cumplirse que

$$ds(t) = \left| \vec{v}(t) \right| .dt \Rightarrow \frac{ds(t)}{dt} = \left| \vec{v}(t) \right|$$

Si representamos en un diagrama cartesiano el intervalo temporal del movimiento frente al intervalo correspondiente de arco recorrido en cada instante, se tendrá una figura como la siguiente.




Y a cada instante t le corresponde un arco s, y a la inversa, para cada arco s le corresponde un tiempo t, debido a la monotonía de la función s(t).

Es decir, se tienen las funciones:

s(t): $[t_o,t_f] \to [0,s_f]$, o sea: $\forall t \in [t_o, t_f], \ s(t) \in [0, s_f]$

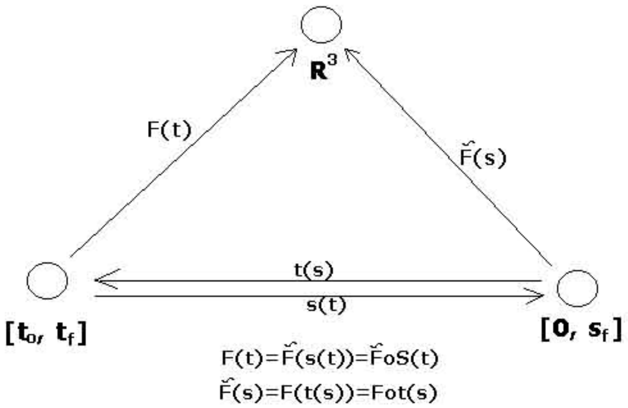
t(s): $[0,s_f] \to [t_o,t_f]$, o sea: $\forall s \in [0, s_f], \ t(s) \in [t_o, t_f]$

Podemos considerar, entonces, funciones con parámetro t (parametrización temporal) con dominio en $[t_o,t_f]$, y funciones con parámetro s (parametrización natural) con dominio en $[0,s_f]$.

Así, podemos representar, para funciones con valores en $R^3$:

$$F(t):[t_o,t_f]\rightarrow R^3 \qquad\qquad \tilde{F}(s):[0,s_f]\rightarrow R^3$$

que quedan relacionadas mediante la regla de composición de funciones que indicamos en la figura.




Así, por ejemplo, para el radio vector de un punto de la trayectoria se tiene:

$$\vec{r}(t):[t_o,t_f]\rightarrow[x_1(t),x_2(t),x_3(t)]\in R^3, \qquad \vec{r}(t)=\tilde{\vec{r}}(s(t))=\tilde{\vec{r}}\circ s(t)$$

o también:

$$\tilde{\vec{r}}(s):[0,s_f]\rightarrow[\tilde{x}_1(s),\tilde{x}_2(s),\tilde{x}_3(s)]\in R^3, \qquad \tilde{\vec{r}}(s)=\vec{r}(t(s))=\vec{r}\circ t(s)$$

Analicemos, con esta parametrización, la velocidad y la aceleración:

Velocidad:

$$\vec{v}(t)=\dot{\vec{r}}(t)=\frac{d\vec{r}(t)}{dt}=\frac{d\tilde{\vec{r}}(s)}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}=|\vec{v}(t)|.\frac{d\tilde{\vec{r}}(s)}{ds}\Rightarrow\vec{v}(t)=|\vec{v}(t)|.\frac{d\tilde{\vec{r}}(s)}{ds}$$

esto quiere decir que $\frac{d\tilde{\vec{r}}(s)}{ds}=\frac{\vec{v}(t)}{|\vec{v}(t)|}$, y, por consiguiente, es unitario con la dirección del vector velocidad, o sea, es *unitario tangente a la trayectoria.*

$$\tilde{\vec{U}}_T(s)=\frac{d\tilde{\vec{r}}(s)}{ds} \quad \text{es unitario tangente}$$

Podemos expresarlo también con parametrización temporal:

$$\vec{U}_T(t)=\tilde{\vec{U}}_T(s)=\tilde{\vec{U}}_T\circ s(t)$$

y la velocidad queda definitivamente así:

$$\boxed{\vec{v}(t)=|\vec{v}(t)|.\vec{U}_T(t)}$$

Aceleración:

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(|\vec{v}(t)|.\vec{U}_T(t)\right) = \frac{d|\vec{v}(t)|}{dt}.\vec{U}_T(t) + |\vec{v}(t)|.\frac{d\vec{U}_T(t)}{dt}$$

Veamos como es el vector derivada temporal del vector unitario tangente:

$$\dot{\vec{U}}_T(t) = \frac{d\vec{U}_T(t)}{dt} = \frac{d\tilde{\vec{U}}_T(s)}{ds}.\frac{ds}{dt} = |\vec{v}(t)|.\frac{d\tilde{\vec{U}}_T(s)}{ds}$$

Veamos que el vector $\dfrac{d\tilde{\vec{U}}_T(s)}{ds}$ es perpendicular al vector $\tilde{\vec{U}}_T(s)$:

pues de ser $\tilde{\vec{U}}_T(s).\tilde{\vec{U}}_T(s) = 1$, se tiene, al derivar:

$$\frac{d\tilde{\vec{U}}_T(s)}{ds}.\tilde{\vec{U}}_T(s) + \tilde{\vec{U}}_T(s).\frac{d\tilde{\vec{U}}_T(s)}{ds} = 0 \Rightarrow 2.\frac{d\tilde{\vec{U}}_T(s)}{ds}.\tilde{\vec{U}}_T(s) = 0 \Rightarrow \frac{d\tilde{\vec{U}}_T(s)}{ds}.\tilde{\vec{U}}_T(s) = 0$$

Por tanto, el vector $\dfrac{d\tilde{\vec{U}}_T(s)}{ds}$ es normal al vector $\tilde{\vec{U}}_T(s)$. Su modulo se llama curvatura $\tilde{k}(s)$ y su inverso, radio de curvatura, $\tilde{\rho}(s) = \dfrac{1}{\tilde{k}(s)}$:

Por tanto, podemos expresar un vector unitario en la dirección perpendicular al vector $\tilde{\vec{U}}_T(s)$ de la forma:

$$\tilde{\vec{U}}_N(s) = \frac{1}{\tilde{k}(s)}.\frac{d\tilde{\vec{U}}_T(s)}{ds}$$

y se tiene:

$$\frac{d\tilde{\vec{U}}_T(s)}{ds} = \tilde{k}(s).\tilde{\vec{U}}_N(s)$$

por tanto, en parametrización temporal, es

$$\frac{d\vec{U}_T(t)}{dt} = \frac{d\tilde{\vec{U}}_T(s)}{ds}.\frac{ds}{dt} = |\vec{v}(t)|.\frac{d\tilde{\vec{U}}_T(s)}{ds} = |\vec{v}(t)|.\tilde{k}(s).\tilde{\vec{U}}_N(s)$$

y la expresión de la aceleración queda, finalmente, de la forma:

$$\vec{a}(t) = \frac{d|\vec{v}(t)|}{dt}.\vec{U}_T(t) + |\vec{v}(t)|.\frac{d\vec{U}_T(t)}{dt} = \frac{d|\vec{v}(t)|}{dt}.\vec{U}_T(t) + |\vec{v}(t)|^2.\tilde{k}(s).\tilde{\vec{U}}_N(s)$$

En parametrización temporal, usando el radio de curvatura, se tiene:

$$\vec{a}(t) = \frac{d|\vec{v}(t)|}{dt}.\vec{U}_T(t) + |\vec{v}(t)|^2.k(t).\vec{U}_N(t) = \frac{d|\vec{v}(t)|}{dt}.\vec{U}_T(t) + \frac{|\vec{v}(t)|^2}{\rho(t)}.\vec{U}_N(t)$$

$$\boxed{\vec{a}(t) = \frac{d|\vec{v}(t)|}{dt}.\vec{U}_T(t) + \frac{|\vec{v}(t)|^2}{\rho(t)}.\vec{U}_N(t)}$$

Aceleración tangencial:

$$\boxed{\vec{a}_T(t) = \frac{d|\vec{v}(t)|}{dt}.\vec{U}_T(t)}$$

Aceleración normal:

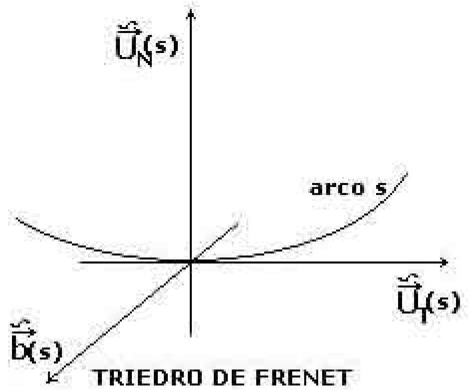
$$\boxed{\vec{a}_N(t) = \frac{|\vec{v}(t)|^2}{\rho(t)}.\vec{U}_N(t)}$$

Vector binormal a la trayectoria:

Puede definirse un vector unitario perpendicular a los vectores unitarios tangencial y normal mediante un producto vectorial:

$$\tilde{\vec{b}}(s) = \tilde{\vec{U}}_T(s) \wedge \tilde{\vec{U}}_N(s)$$

El triedro directo $\left\{\tilde{\vec{U}}_T(s), \tilde{\vec{U}}_N(s), \tilde{\vec{b}}(s)\right\}$ se denomina *Triedro de Frenet.*



TRIEDRO DE FRENET

Otras expresiones para la componente tangencial y normal de la aceleración:

Haciendo el producto escalar de la aceleración total con la velocidad:

$$|\vec{a}(t).\vec{v}(t)| = \left|\left[|\vec{a}_T(t)|.\vec{U}_T(t) + |\vec{a}_N(t)|.\vec{U}_N(t)\right].|\vec{v}(t)|.\vec{U}_T(t)\right| =$$

$$= \left||\vec{a}_T(t)|.|\vec{v}(t)|.\vec{U}_T(t).\vec{U}_T(t) + |\vec{a}_N(t)|.|\vec{v}(t)|.\vec{U}_N(t).\vec{U}_T(t)\right| = |\vec{a}_T(t)|.|\vec{v}(t)|$$

Por tanto, se tendrá: $|\vec{a}(t).\vec{v}(t)| = |\vec{a}_T(t)|.|\vec{v}(t)| \Rightarrow |\vec{a}_T(t)| = \dfrac{|\vec{a}(t).\vec{v}(t)|}{|\vec{v}(t)|}$

Haciendo ahora el producto vectorial:

$$\vec{a}(t) \wedge \vec{v}(t) = \left[ |\vec{a}_T(t)|.\vec{U}_T(t) + |\vec{a}_N(t)|.\vec{U}_N(t) \right] \wedge |\vec{v}(t)|.\vec{U}_T(t) = |\vec{a}_T(t)|.|\vec{v}(t)|.\vec{U}_T(t) \wedge \vec{U}_T(t) +$$
$$+ |\vec{a}_N(t)|.|\vec{v}(t)|.\vec{U}_N(t) \wedge \vec{U}_T(t) = |\vec{a}_N(t)|.|\vec{v}(t)|.\vec{b}(t)$$

por tanto, es: $|\vec{a}(t) \wedge \vec{v}(t)| = |\vec{a}_N(t)|.|\vec{v}(t)| \Rightarrow |\vec{a}_N(t)| = \dfrac{|\vec{a}(t) \wedge \vec{v}(t)|}{|\vec{v}(t)|}$

Por tanto:

$$\boxed{|\vec{a}_T(t)| = \frac{|\vec{a}(t).\vec{v}(t)|}{|\vec{v}(t)|} \qquad |\vec{a}_N(t)| = \frac{|\vec{a}(t) \wedge \vec{v}(t)|}{|\vec{v}(t)|}}$$

El radio de curvatura admite también esta expresión:

$$|\vec{a}_N(t)| = \frac{|\vec{v}(t)|^2}{\rho(t)} = \frac{|\vec{a}(t) \wedge \vec{v}(t)|}{|\vec{v}(t)|} \Rightarrow \rho(t) = \frac{|\vec{v}(t)|^3}{|\vec{a}(t) \wedge \vec{v}(t)|}$$

## 3. Movimiento en un plano. Coordenadas polares:

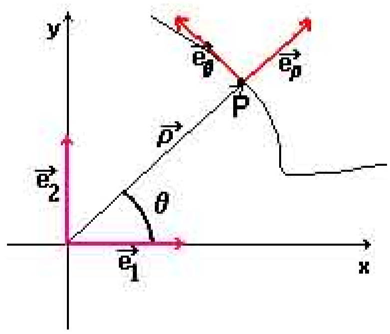
### 3.1. Las coordenadas polares:

Dado un sistema de coordenadas cartesianas en el plano, de vectores unitarios dados por la base $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, se puede definir con respecto al mismo un sistema de coordenadas ortogonales de modo que si son x, y, las coordenadas de un punto dado P del plano, sus coordenadas polares sean $\rho$ y $\theta$, definidas por:

$$\rho = +\sqrt{x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2}}, \ \theta = arctg\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$$

$$\vec{\rho} = (x_1, x_2) = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2$$

$$\vec{\rho} = \rho.\cos\theta.\vec{e}_1 + \rho.sen\theta.\vec{e}_2$$




Los vectores unitarios correspondientes a las coordenadas polares son $\vec{e}_\rho \ y \ \vec{e}_\theta$, que se obtienen: $\vec{e}_\rho = \frac{\vec{\rho}}{|\vec{\rho}|} = \cos\theta.\vec{e}_1 + sen\theta.\vec{e}_2$, y $\vec{e}_\theta.\vec{e}_\rho = 0, \ |\vec{e}_\theta| = 1$. Por tanto, se tiene para los vectores de la base unitaria en polares, expresada en función de los vectores unitarios de los ejes cartesianos:

$$\begin{cases} \vec{e}_\rho = \cos\theta.\vec{e}_1 + sen\theta.\vec{e}_2 \\ \vec{e}_\theta = -sen\theta.\vec{e}_1 + \cos\theta.\vec{e}_2 \end{cases}$$

y sus derivadas con respecto a $\theta$:

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{e}_\rho}{d\theta} = -sen\theta.\vec{e}_1 + \cos\theta.\vec{e}_2 = \vec{e}_\theta \\ \dfrac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} = -\cos\theta.\vec{e}_1 - sen\theta.\vec{e}_2 = -\vec{e}_\rho \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{d\vec{e}_\rho}{d\theta} = \vec{e}_\theta \\ \dfrac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} = -\vec{e}_\rho \end{cases}$$

### 3.2. Velocidad y aceleración:

De ser $\vec{e}_\rho = \dfrac{\vec{\rho}}{|\vec{\rho}|} = \dfrac{\vec{\rho}}{\rho} \Rightarrow \vec{\rho} = \rho.\vec{e}_\rho$. Por tanto, veamos como escribir la velocidad y la aceleración en función de estos vectores unitarios.

Velocidad:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{\rho}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\rho(t).\vec{e}_\rho(t)\right) = \dot{\rho}(t).\vec{e}_\rho(t) + \rho(t).\dot{\vec{e}}_\rho(t)$$

y siendo:

$$\dot{\vec{e}}_\rho(t) = \frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \frac{d\vec{e}_\rho}{d\theta}.\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dt}.\vec{e}_\theta = \dot{\theta}.\dot{\vec{e}}_\theta$$

se tiene:

$$\boxed{\vec{v}(t) = \dot{\rho}(t).\vec{e}_\rho(t) + \dot{\theta}.\rho(t).\vec{e}_\theta}$$

Aceleración:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{\rho}(t).\vec{e}_\rho(t) + \dot{\theta}.\dot{\vec{e}}_\theta\right) = \ddot{\rho}.\vec{e}_\rho(t) + \dot{\rho}.\dot{\vec{e}}_\rho + \dot{\rho}.\dot{\theta}.\vec{e}_\theta + \rho.\ddot{\theta}.\vec{e}_\theta + \rho.\dot{\theta}.\dot{\vec{e}}_{\theta=} =$$
$$= \ddot{\rho}.\vec{e}_\rho(t) + \dot{\rho}.\dot{\theta}.\dot{\vec{e}}_\theta + \dot{\rho}.\dot{\theta}.\vec{e}_\theta + \rho.\ddot{\theta}.\vec{e}_\theta - \rho.\dot{\theta}^2.\dot{\vec{e}}_\rho$$

ordenando términos:

$$\boxed{\vec{a}(t) = \left[\ddot{\rho} - \rho.\dot{\theta}^2\right].\vec{e}_\rho + \left[2\dot{\rho}.\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}.\right].\vec{e}_\theta}$$

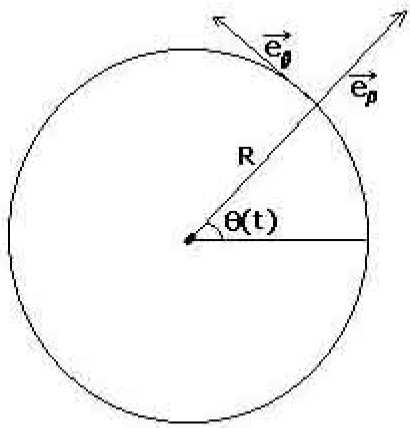
Donde hay, pues, una componente radial y una componente azimutal:

Componente radial: $\vec{a}_{radial}(t) = \left[\ddot{\rho} - \rho.\dot{\theta}^2\right].\vec{e}_\rho$

Componente azimutal: $\vec{a}_{azimutal}(t) = \left[2\dot{\rho}.\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}.\right].\vec{e}_\theta$

### 3.3. **Movimiento circular:**

El desplazamiento de una partícula siguiendo una trayectoria sobre una circunferencia de radio R permite describir la velocidad y la aceleración de la forma siguiente:




Se anulan la componente radial de la velocidad y de la aceleración, manteniéndose constante el modulo del vector de posición:

$$|\vec{\rho}(t)| = R, \quad \dot{\vec{\rho}}(t) = \ddot{\vec{\rho}}(t) = 0$$

que sustituyendo en las ecuaciones vectoriales de la velocidad y la aceleración se tiene:

$$\vec{v}(t) = R.\dot{\theta}(t).\vec{e}_\theta$$
$$\vec{a}(t) = R\ddot{\theta}(t_o)\vec{e}_\theta - R.\dot{\theta}^2 e_\rho$$

Vector unitario tangente a la trayectoria:

$$\vec{U}_T(t) = \frac{\vec{v}(t)}{|\vec{v}(t)|} = \frac{R\dot{\theta}(t)\vec{e}_\theta}{R|\dot{\theta}(t)|} = \frac{\dot{\theta}(t)}{|\dot{\theta}(t)|}.\vec{e}_\theta = sign(\dot{\theta}(t)).\vec{e}_\theta$$

O sea:

$$\vec{U}_T = \pm\vec{e}_\theta(t)$$

(el signo depende del sentido de la variación del ángulo θ)

Aceleración tangencial y normal:

$$\vec{a}_T(t) = \left(\vec{a}(t).\vec{U}_T(t)\right)\vec{U}_T(t) = \left(R.\ddot{\theta}(t).sign\,\dot{\theta}(t)\right)sign\,\dot{\theta}(t).\vec{e}_r(t) = R.\ddot{\theta}(t).\vec{e}_r(t)$$

$$\vec{a}_N(t) = \vec{a}(t) - \vec{a}_T(t) = -R.\dot{\theta}^2(t).\vec{e}_\rho$$

O sea:

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{a}_T(t) = R.\ddot{\theta}(t).\vec{e}_\theta \\ \vec{a}_N(t) = -R.\dot{\theta}^2(t).\vec{e}_\rho \end{array}}$$

Vector unitario normal a la trayectoria:

$$\vec{U}_N(t) = \frac{\vec{a}_N(t)}{|\vec{a}_N(t)|} = \frac{-R\dot{\theta}^2(t)\vec{e}_\rho}{R\dot{\theta}^2(t)} = -\vec{e}_\rho$$

O sea:

$$\vec{U}_N(t) = -\vec{e}_\rho$$

Radio de curvatura:

$$|\vec{a}_N(t)| = \frac{|\vec{v}(t)|^2}{\rho(t)} \Rightarrow \rho(t) = \frac{|\vec{v}(t)|^2}{|\vec{a}_N(t)|} = \frac{R^2.\dot{\theta}(t)^2}{|R.\dot{\theta}(t)^2|} = \frac{R^2.\dot{\theta}(t)^2}{R.\dot{\theta}(t)^2} = R$$

Por tanto, es:

$$\rho(t) = R$$

### 3.4. Movimiento circular uniforme:

Se define como el movimiento circular en el que $\varpi = \dot{\theta}(t) = constante$

El ángulo en función de la velocidad angular:

$$\varpi = \dot{\theta}(t) \Rightarrow \varpi = \frac{d\theta(t)}{dt} \Rightarrow \varpi.dt = d\theta(t) \Rightarrow \int_{t_o}^{t} d\theta(t) = \int_{t_o}^{t} \varpi.dt =$$
$$= \theta(t) - \theta(t_o) = \varpi.(t - t_o)$$

Por tanto:

$$\boxed{\theta(t) = \theta(t_o) + \varpi(t - t_o)}$$

Expresión de la velocidad y la aceleración:

O sea:

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{a}_T(t) &= R.\ddot{\theta}(t).\vec{e}_\theta = 0 \\ \vec{a}_N(t) &= -R.\varpi^2.\vec{e}_\rho \end{aligned}}$$

Vector de posición de la partícula en coordenadas cartesianas:

$$\vec{\rho}(t) = R.\vec{e}_\rho(t) = R.[\cos\theta.\vec{e}_1 + sen\theta.\vec{e}_2] =$$
$$= R[\cos(\theta(t_o) + \varpi(t - t_o)).\vec{e}_1 + sen(\theta(t_o) + \varpi(t - t_o)).\vec{e}_2]$$

Periodo:

Se define como el tiempo que tarda la partícula en completar una vuelta. Si llamamos T al periodo, el vector de posición será el mismo en el instante t que en el instante t+n.T, $n \in N$, y el ángulo vendrá aumentado en n vueltas:

$$\vec{\rho}(t) = \vec{\rho}(t + n.T)$$
$$\theta(t) \pm n.2\pi = \theta(t + n.T)$$

Es decir, para un periodo T podemos escribir:

$$\theta(t) + 2\pi.sign(\varpi) = \theta(t + T)$$

O bien:

$$\theta(t_o) + \varpi(t - t_o) + 2\pi.sign(\varpi) = \theta(t_o) + \varpi(t - t_o + T)$$

$$\theta(t_o) + \varpi(t - t_o) + 2\pi.sign(\varpi) = \theta(t_o) + \varpi(t - t_o) + \varpi.T$$

Simplificando:

$$2\pi.sign(\varpi) = \varpi.T \Rightarrow T = \frac{2\pi.sign(\varpi)}{\sigma} = \frac{2\pi}{|\varpi|}$$

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\varpi}}$$

### 3.5. Movimiento circular uniformemente acelerado:

Se define como el movimiento circular en el que $\alpha = \ddot{\theta}(t) = constante$

La velocidad angular en función de la aceleración angular:

$$\alpha = \ddot{\theta}(t) \Rightarrow \alpha = \frac{d\dot{\theta}(t)}{dt} \Rightarrow \varpi.dt = d\dot{\theta}(t) \Rightarrow \int_{t_o}^{t} d\dot{\theta}(t) = \int_{t_o}^{t} \alpha.dt =$$

$$= \dot{\theta}(t) - \dot{\theta}(t_o) = \alpha(t - t_o)$$

Por tanto:

$$\boxed{\varpi(t) = \varpi(t_o) + \alpha.(t - t_o)}$$

Expresión del ángulo en función de la aceleración angular:

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \varpi \Rightarrow \frac{d\theta(t)}{dt} = \varpi(t_o) + \alpha.(t - t_o) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta(t) - \theta(t_o) = \varpi(t_o).(t - t_o) + \frac{\alpha.(t - t_o)^2}{2}$$

En definitiva:

$$\boxed{\theta(t) = \theta(t_o) + \varpi(t_o).(t - t_o) + \frac{\alpha.(t - t_o)^2}{2}}$$

Velocidad v(t) de la partícula en función de la aceleración angular:

$$\vec{v}(t) = R.\dot{\theta}(t).\vec{e}_\theta = R.\varpi.\vec{e}_\theta = R.\left(\varpi(t_o) + \alpha(t - t_o)\right).\vec{e}_\theta$$

Y el módulo:

$$|\vec{v}(t)| = R.|\varpi(t_o) + \alpha(t - t_o)|$$

La aceleración a(t) en función de la aceleración angular:

$$\vec{a}(t) = -R.\dot{\theta}(t)^2.\vec{e}_\rho + R.\ddot{\theta}(t).\vec{e}_\theta = -R.\varpi^2.\vec{e}_\rho + R.\alpha.\vec{e}_\theta =$$

$$= -R\left(\varpi(t_o) + \alpha(t - t_o)\right).\vec{e}_\rho + R\alpha.\vec{e}_\theta$$

Componente normal:

$$\vec{a}_N(t) = -R(\varpi(t_o) + \alpha(t - t_o)).\vec{e}_\rho$$

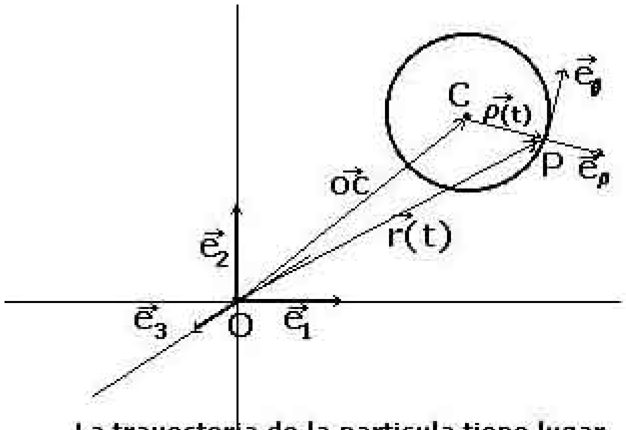
Componente tangencial:

$$\vec{a}_T(t) = R.\alpha.\vec{e}_\theta$$

Vector de posición en función de la aceleración angular:

$$\vec{\rho}(t) = R\{\cos(\theta(t_o) + \varpi(t_o).(t - t_o) + \frac{\alpha.(t - t_o)^2}{2}).e_1 +$$
$$+ sen(\theta(t_o) + \varpi(t_o).(t - t_o) + \frac{\alpha.(t - t_o)^2}{2}).\vec{e}_2\}$$

3.6. **Expresión vectorial del movimiento circular con respecto a un triedro exterior:**




La trayectoria de la partícula tiene lugar en el plano $e_1$ $e_2$

Consideremos el triedro formado por los tres vectores unitarios perpendiculares

$$\{\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_3\}$$

Se tienen los productos vectoriales dados por la regla del avance del tornillo:

$$\begin{cases} \vec{e}_\rho \wedge \vec{e}_\theta = \vec{e}_3 \\ \vec{e}_\theta \wedge \vec{e}_3 = \vec{e}_\rho \\ \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_\rho = \vec{e}_\theta \end{cases}$$

Se tiene:

$$\vec{r}(t) = R.\vec{e}_\rho$$
$$\vec{v}(t) = R.\dot{\theta}.\vec{e}_\theta$$
$$\vec{a}(t) = R.\ddot{\theta}.\vec{e}_\theta - R.\dot{\theta}^2.\vec{e}_\rho$$

Por tanto, se puede expresar la velocidad así:

$$\vec{v}(t) = R.\dot{\theta}(\vec{e}_3 \wedge \vec{e}_\rho) = \dot{\theta}.\vec{e}_3 \wedge R.\vec{e}_\rho = \vec{\varpi} \wedge \vec{\rho}(t)$$

O sea: $\vec{v}(t) = \vec{\varpi} \wedge \vec{\rho}(t)$

Y la aceleración es:

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \frac{d}{dt}\left(\vec{\varpi} \wedge \vec{\rho}(t)\right) = \dot{\vec{\varpi}} \wedge \vec{\rho}(t) + \vec{\varpi} \wedge \dot{\vec{\rho}}(t) = \vec{\alpha}(t) \wedge \vec{\rho}(t) + \vec{\varpi} \wedge \vec{v}(t) =$$
$$= \vec{\alpha}(t) \wedge \vec{\rho}(t) + \vec{\varpi} \wedge \left(\vec{\varpi} \wedge \vec{\rho}(t)\right)$$

En definitiva: $\vec{a}(t) = \vec{\alpha}(t) \wedge \vec{\rho}(t) + \vec{\varpi} \wedge \left(\vec{\varpi} \wedge \vec{\rho}(t)\right)$

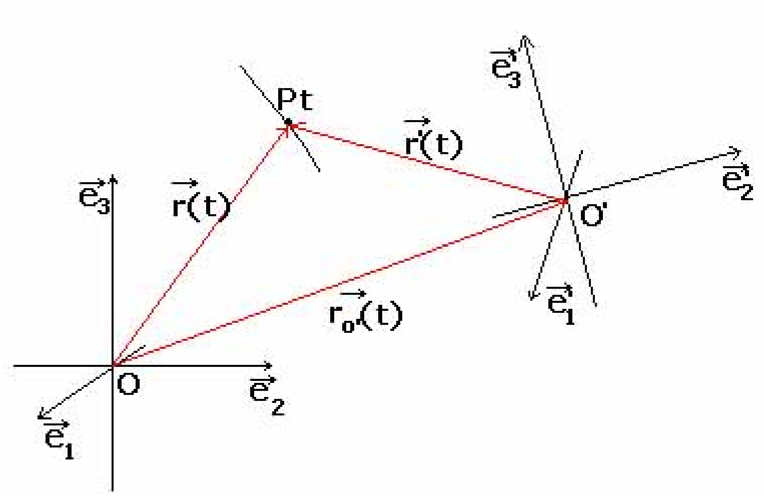
En función de los vectores de posición del triedro exterior (figura):

$$\vec{v}(t) = \vec{\varpi} \wedge \vec{\rho}(t) = \vec{\varpi} \wedge \left(\vec{r}(t) - \vec{OC}\right)$$

$$\vec{a}(t) = \vec{\alpha}(t) \wedge (\vec{r}(t) - \vec{OC}) + \vec{\varpi}(T) \wedge \left(\vec{r}(t) - \vec{OC}\right)$$

## 4. Movimiento relativo:

Consideremos dos sistemas de referencia ortonormales con movimiento relativo cualquiera y tratemos de escribir el movimiento de una partícula en movimiento con respecto a ambos sistemas.




Los dos sistemas de referencia ortonormales (un punto origen O y una base ortonormal B) los hemos representado por:

Sistema *R={O, B}* siendo $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$
Sistema *R'={O', B'}* siendo $B' = \{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\}$

En la determinación de la velocidad y de la aceleración intervienen la derivada temporal del vector de posición de una partícula en movimiento con respecto a ambos sistemas, en una expresión donde hay vectores referidos a uno y otro de los dos sistemas de referencia, por lo cual es necesario conocer la derivada temporal de un vector en uno de los sistemas cuando está referido al otro.

Así, por ejemplo, tenemos para el vector de posición de una partícula:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_{o'}(t) + \vec{r}\,'(t) \quad [1]$$

donde aparecen como vectores referidos al sistema R el vector de posición de la partícula y el vector de posición del origen O' del sistema de referencia R', mientras que también aparece un vector referido al sistema de referencia R' que es el vector de posición de la partícula con respecto a este sistema.

Si se trata de hallar la velocidad y aceleración de la partícula respecto al sistema de referencia R tendremos que derivar:

$$\vec{r}(t) = \sum_{i=1}^{3} x_i(t).\vec{e}_i \qquad (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \in R^3$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{3} \dot{x}_i(t).\vec{e}_i$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{3} \ddot{x}_i(t).\vec{e}_i$$

Asimismo, si nos referimos al sistema de referencia R', se tiene:

$$\vec{r}'(t) = \sum_{i=1}^{3} x'_i(t).\vec{e}'_i \qquad (x'_1(t), x'_2(t), x'_3(t)) \in R^3$$

$$\vec{v}'(t) = \frac{d\vec{r}'(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{3} \dot{x}'_i(t).\vec{e}'_i$$

$$\vec{a}'(t) = \frac{d\vec{v}'(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{3} \ddot{x}'_i(t).\vec{e}'_i$$

### 4.1. Velocidad y aceleración relativa:

Representaremos la derivada de un vector con respecto a las base B y B' por

$$\vec{b}(t) = \sum_{i=1}^{3} \vec{b}_i(t).\vec{e}_i, \quad \left(\frac{d\vec{b}(t)}{dt}\right)_B = \sum_{i=1}^{3} \dot{b}_i(t).\vec{e}_i$$

$$\vec{b}(t) = \sum_{i=1}^{3} \vec{b}'_i(t).\vec{e}'_i, \quad \left(\frac{d\vec{b}(t)}{dt}\right)_{B'} = \sum_{i=1}^{3} \dot{b}'_i(t).\vec{e}'_i$$

A partir de la relación vectorial [1] de la figura:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_{o'}(t) + \vec{r}'(t) \Rightarrow \vec{v}(t) = \left(\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right)_B = \left(\frac{d\vec{r}_{o'}(t)}{dt}\right)_B + \left(\frac{d\vec{r}'(t)}{dt}\right)_B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{v}(t) = \vec{v}_{o'}(t) + \left(\frac{d\vec{r}'(t)}{dt}\right)_B$$

Aparece, pues, el término $\left(\frac{d\vec{r}'(t)}{dt}\right)_B$, que representa la derivada respecto de la base B del vector $\vec{r}'(t)$ referido a la base B'.

Veamos como se podría determinar la derivada de un vector expresada en una base B cuando el vector está referido a la otra base B'.

Esto es, cómo se podría obtener la derivada del vector $\vec{b}(t) = \sum_{i=1}^{3} b'_i(t).\vec{e}'_i$ en la base B:

$$\left(\frac{d\vec{b}(t)}{dt}\right)_B = \sum_{i=1}^{3} \dot{b}'_i(t).\vec{e}'_i + \sum_{i=1}^{3} b'_i(t).\left(\frac{d\vec{e}'_i(t)}{dt}\right)_B \qquad [2]$$

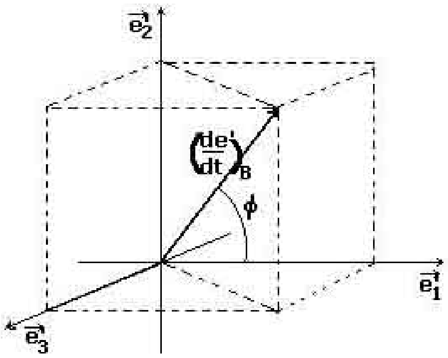
Para obtener la expresión, pues, nos falta obtener el último término, que representa la derivada de cada uno de los vectores unitarios de la base B' con respecto a la base B.

- Cálculo de las derivadas $\left(\frac{d\vec{e}'_i(t)}{dt}\right)_B$:

$$\left(\frac{d\vec{e}'_i(t)}{dt}\right)_B = \sum_{i=1}^{3} \beta_{ij}.\vec{e}'_j \qquad i = 1,2,3$$

siendo las coordenadas $\beta_{ij}$ las proyecciones ortogonales del vector $\left(\frac{d\vec{e}'_i(t)}{dt}\right)_B$ sobre cada uno de los vectores unitarios de la base B':

$$\beta_{ij} = \vec{e}'_i(t).\left(\frac{d\vec{e}'_i(t)}{dt}\right)_B$$




Puesto que la base B' es ortonormal, por definición los vectores que la constituyen son unitarios y ortogonales, esto es, su producto escalar es cero si son distintos o uno si son iguales, es por tanto una delta de Cronecker:

$$\vec{e}'_i(t).\vec{e}'_j(t) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & si\ i \neq j \\ 1, & si\ i = j \end{cases}$$

Su derivada será, por tanto, nula:

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{e}'_i(t).\vec{e}'_j(t)\right] = 0 \Rightarrow \left(\frac{d\vec{e}'_j}{dt}\right)_B .\vec{e}'_i(t) + \vec{e}'_j(t).\left(\frac{d\vec{e}'_i(t)}{dt}\right)_B = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \beta_{ij} + \beta_{ji} = 0 \Rightarrow \beta_{ij} = -\beta,_{ji},\ i,j = 1,2,3$$

Esto nos indica que la matriz $B = (\beta_{ij})_3$ es una matriz antisimétrica, y, por consiguiente, es $\beta_{ii} = 0,\ i = 1,2,3$

Podemos, en definitiva, escribir ya las derivadas respecto de la base B de los vectores básicos de B':

$$\left(\frac{d\vec{e}'_1(t)}{dt}\right)_B = \beta_{12}(t).\vec{e}'_2(t) + \beta_{13}(t).\vec{e}'_3(t), \quad pues\ \beta_{11} = 0$$
$$\left(\frac{d\vec{e}'_2(t)}{dt}\right)_B = \beta_{21}(t).\vec{e}'_1(t) + \beta_{23}(t).\vec{e}'_3(t), \quad pues\ \beta_{22} = 0$$
$$\left(\frac{d\vec{e}'_3(t)}{dt}\right)_B = \beta_{31}(t).\vec{e}'_1(t) + \beta_{32}(t).\vec{e}'_2(t), \quad pues\ \beta_{33} = 0$$

y teniendo en cuenta las relaciones de los vectores del triedro:

$$\vec{e}'_1(t) \wedge \vec{e}'_2 = \vec{e}'_3$$
$$\vec{e}'_3(t) \wedge \vec{e}'_1 = \vec{e}'_2$$
$$\vec{e}'_2(t) \wedge \vec{e}'_3 = \vec{e}'_1$$

se tiene, al sustituir:

$$\left(\frac{d\vec{e}'_1(t)}{dt}\right)_B = \beta_{12}(t).\vec{e}'_3(t) \wedge \vec{e}'_1(t) + \beta_{13}(t).\vec{e}'_1(t) \wedge \vec{e}'_2(t) =$$
$$= \left[\beta_{12}(t).\vec{e}'_3(t) + \beta_{31}(t).\vec{e}'_2(t)\right] \wedge \vec{e}'_1(t)$$
$$\left(\frac{d\vec{e}'_2(t)}{dt}\right)_B = \beta_{21}(t).\vec{e}'_2(t) \wedge \vec{e}'_3(t) + \beta_{23}(t).\vec{e}'_1(t) \wedge \vec{e}'_2(t) =$$
$$= \left[\beta_{12}(t).\vec{e}'_3(t) + \beta_{23}(t).\vec{e}'_1(t)\right] \wedge \vec{e}'_2(t)$$
$$\left(\frac{d\vec{e}'_3(t)}{dt}\right)_B = \beta_{31}(t).\vec{e}'_2(t) \wedge \vec{e}'_3(t) + \beta_{32}(t).\vec{e}'_3(t) \wedge \vec{e}'_1(t) =$$
$$= \left[\beta_{31}(t).\vec{e}'_2(t) + \beta_{23}(t).\vec{e}'_1(t)\right] \wedge \vec{e}'_3(t)$$

Llamando $\vec{\varpi}(t) = \beta_{23}\vec{e}'_1(t) + \beta_{31}\vec{e}'_2 + \beta_{12}\vec{e}'_3$ (es la *velocidad angular, y es un vector referido a la base B')*

$$\boxed{\left(\frac{d\vec{e}'_i(t)}{dt}\right)_B = \vec{\varpi}(t) \wedge \vec{e}'_i(t) \qquad i = 1,2,3}$$

Sustituyendo en [2]:

$$\left(\frac{d\vec{b}(t)}{dt}\right)_B = \left(\frac{db(t)}{dt}\right)_{B'} + \sum_{i=1}^{3} b_i^{'}(t).\vec{\varpi}(t) \wedge \vec{e}'_i(t) =$$
$$= \left(\frac{db(t)}{dt}\right)_{B'} + \vec{\varpi}(t) \wedge \sum_{i=1}^{3} b_i^{'}(t).\vec{e}'_i(t) = \left(\frac{db(t)}{dt}\right)_{B'} + \vec{\varpi}(t) \wedge \vec{b}(t)$$

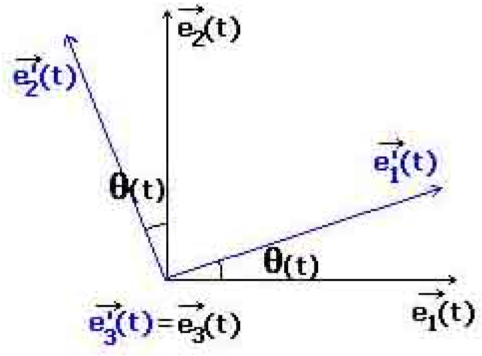
En definitiva, la expresión [2] queda así:

$$\boxed{\left(\frac{d\vec{b}(t)}{dt}\right)_B = \left(\frac{db(t)}{dt}\right)_{B'} + \vec{\varpi}(t) \wedge \vec{b}(t)}$$

Dado un vector referido a la base B', se tiene que su derivada en la base B es la derivada del vector en la base B' más el producto vectorial de la velocidad angular de la base B' con respecto a la base B por el vector dado.

### 4.2. Velocidad y aceleración angular:

Supongamos que el sistema B' tiene un movimiento de rotación alrededor de $e_3$ y sean $\theta(t)$ el ángulo recorrido en un tiempo t. Para simplificar, supongamos coincidentes las direcciones de $e_3$ y $e'_3$.




Expresión del vector velocidad angular en función del ángulo de giro del sistema:

$$\vec{e}'_1(t) = \cos\theta(t).\vec{e}_1(t) + sen\theta(t).\vec{e}_2(t)$$
$$\vec{e}'_2(t) = -sen\theta(t).\vec{e}_1(t) + \cos\theta(t).\vec{e}_2(t)$$
$$\vec{e}'_3(t) = \vec{e}_3(t)$$

Haciendo las derivadas temporales, se tiene:

$$\left(\frac{d\vec{e}_1(t)}{dt}\right)_B = \dot{\theta}(t).\left[-sen\theta(t).\vec{e}_1(t) + \cos\theta(t).\vec{e}_2(t)\right] = \dot{\theta}(t).\vec{e}'_2(t) = \dot{\theta}(t).\vec{e}'_3(t) \wedge \vec{e}'_1(t) = \vec{\varpi}(t) \wedge \vec{e}'_1(t)$$
$$\left(\frac{d\vec{e}_2(t)}{dt}\right)_B = -\dot{\theta}(t).\left[\cos\theta(t).\vec{e}_1(t) + sen\theta(t).\vec{e}_2(t)\right] = -\dot{\theta}(t).\vec{e}'_1(t) = -\dot{\theta}(t).\vec{e}'_2(t) \wedge \vec{e}'_3(t) = \vec{\varpi}(t) \wedge \vec{e}'_2(t)$$
$$\left(\frac{d\vec{e}_3(t)}{dt}\right)_B = 0.\ \ En\ general: \left(\frac{d\vec{e}_3(t)}{dt}\right)_B = \vec{\varpi}(t) \wedge \vec{e}'_3(t)$$

Por tanto, encontramos que $\vec{\varpi}(t) = \dot{\theta}(t).\vec{e}'_3(t)$, la velocidad angular resulta ser la derivada del ángulo de giro en dirección perpendicular al movimiento de rotación instantáneo.

Y se puede escribir, de acuerdo con la figura, que $\vec{\varpi}(t) = \dot{\theta}(t).\vec{e}'_3(t) = \dot{\theta}(t).\vec{e}_3(t)$

La aceleración angular:

$$\vec{\alpha}(t) = \left(\frac{d\vec{\varpi}(t)}{dt}\right)_B = \ddot{\theta}(t).\vec{e}_3$$

O sea:

$$\boxed{\vec{\varpi}(t) = \dot{\theta}.\vec{e}_3 \qquad\qquad \vec{\alpha}(t) = \ddot{\theta}(t).\vec{e}_3}$$

## 4.3. Expresiones generales de la velocidad y la aceleración:

De las expresiones anteriores, tenemos:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_{o'}(t) + \left(\frac{d\vec{r}'(t)}{dt}\right)_B = \vec{v}_{o'}(t) + \left(\frac{d\vec{r}'(t)}{dt}\right)_{B'} + \vec{\varpi}(t) \wedge \vec{r}'(t) = \vec{v}_{o'}(t) + \vec{v}'(t) + \vec{\varpi}(t) \wedge \vec{r}'(t)$$

Por tanto, se tiene para la velocidad:

$$\boxed{\vec{v}(t) = \vec{v}_{o'}(t) + \vec{v}'(t) + \vec{\varpi}(t) \wedge \vec{r}'(t)}$$

La velocidad de una partícula con respecto al sistema R es igual a la velocidad de la partícula con respecto al sistema R', más la velocidad de traslación del origen del sistema R', más el producto vectorial de la velocidad angular por el vector de posición de la partícula en el sistema R'.

$$\vec{a}(t) = \left(\frac{d\vec{v}(t)}{dt}\right)_B = \left(\frac{d\vec{v}_{o'}(t)}{dt}\right)_B + \left(\frac{d\vec{v}'(t)}{dt}\right)_B + \left(\frac{d\vec{\varpi}(t)}{dt}\right)_B \wedge \vec{r}'(t) + \vec{\varpi}(t) \wedge \left(\frac{d\vec{r}'(t)}{dt}\right)_B =$$

$$= \vec{a}_{o'}(t) + \left(\frac{d\vec{v}'(t)}{dt}\right)_{B'} + \vec{\varpi}(t) \wedge \vec{v}'(t) + \vec{\alpha}(t) \wedge \vec{r}'(t) + \vec{\varpi}(t) \wedge \left[\left(\frac{d\vec{r}'(t)}{dt}\right)_{B'} + \vec{\varpi}(t) \wedge \vec{r}'(t)\right]$$

Por tanto, queda:

$$\vec{a}(t) = \vec{a}_{o'}(t) + \vec{a}'(t) + \vec{\varpi}(t) \wedge \vec{v}'(t) + \vec{\alpha}(t) \wedge \vec{r}'(t) + \vec{\varpi}(t) \wedge \left[\vec{v}'(t) + \vec{\varpi}(t) \wedge \vec{r}'(t)\right]$$

En definitiva, la aceleración es:

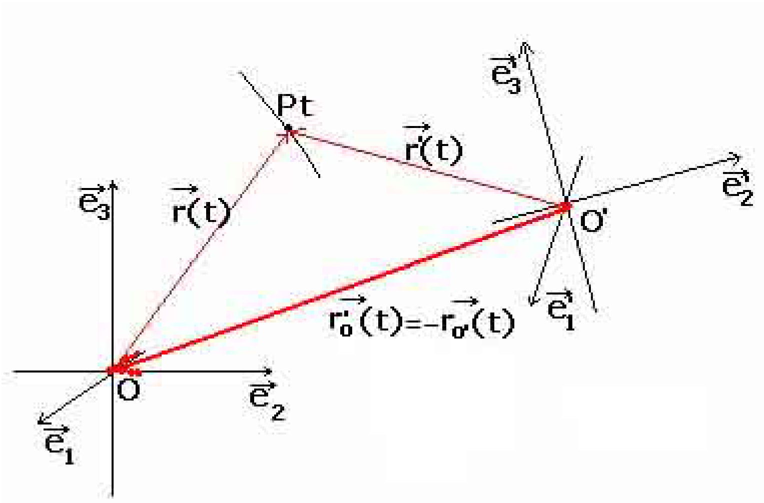
$$\boxed{\vec{a}(t) = \vec{a}_{o'}(t) + \vec{a}'(t) + 2.\vec{\varpi}(t) \wedge \vec{v}'(t) + \vec{\alpha}(t) \wedge \vec{r}'(t) + \vec{\varpi}(t) \wedge \left[\vec{\varpi}(t) \wedge \vec{r}'(t)\right]}$$

Por tanto, podemos resumir de la manera siguiente:

$$\begin{cases} \vec{r}(t) = \vec{r}_{o'}(t) + \vec{r}'(t) \\ \vec{v}(t) = \vec{v}_{o'}(t) + \vec{v}'(t) + \vec{\varpi}(t) \wedge \vec{r}'(t) \\ \vec{a}(t) = \vec{a}_{o'}(t) + \vec{a}'(t) + 2.\vec{\varpi}(t) \wedge \vec{v}'(t) + \vec{\alpha}(t) \wedge \vec{r}'(t) + \vec{\varpi}(t) \wedge \left[\vec{\varpi}(t) \wedge \vec{r}'(t)\right] \end{cases}$$

Este cálculo se ha hecho considerando el vector de posición del origen O' con respecto al origen O, $\vec{r}_{o'}(t)$, la velocidad $\vec{v}_{o'}(t)$ y la aceleración $\vec{a}_{o'}(t)$ del origen O' respecto al origen O.

Podemos, sin embargo, referir el origen O con respecto al origen O', y la velocidad de O con respecto a O', así como también la aceleración de O con respecto a O'.




Y se tiene ahora: $\vec{r}'_o(t) = -\vec{r}_{o'}(t), \ \ \vec{v}'_o(t) = -\vec{v}_{o'}(t), \ \ \vec{a}'_o(t) = -\vec{a}_{o'}(t)$

Con lo cual podemos escribir:

$$\begin{cases} \vec{r}'(t) = \vec{r}'_o(t) + \vec{r}(t) \\ \vec{v}'(t) = \vec{v}'_o(t) + \vec{v}(t) + \vec{\varpi}'(t) \wedge \vec{r}(t) \\ \vec{a}'(t) = \vec{a}'_o(t) + \vec{a}(t) + 2.\vec{\varpi}'(t) \wedge \vec{v}(t) + \vec{\alpha}'(t) \wedge \vec{r}(t) + \vec{\varpi}'(t) \wedge \left[\vec{\varpi}'(t) \wedge \vec{r}(t)\right] \end{cases}$$

Y se denominan:

**Aceleración de arrastre:** $\vec{a}'_o(t) = -\vec{a}_{o'}(t)$

**Aceleración de Coriolis:** $2.\vec{\varpi}'(t) \wedge \vec{v}(t) = -2.\vec{\varpi}(t) \wedge \vec{v}'(t)$

**Aceleración centrífuga:** $\vec{\varpi}'(t) \wedge \left[\vec{\varpi}'(t) \wedge \vec{r}(t)\right] = -\vec{\varpi}(t) \wedge \left[\vec{\varpi}(t) \wedge \vec{r}(t)\right]$

**Casos particulares:**

a) Movimiento de traslación pura (MRTP):

Es el caso en el que no hay rotación en el tiempo de una de las bases respecto de la otra:

$$\vec{\varpi}(t) = \vec{0}, \ \ \vec{\alpha}(t) = \vec{0}$$

sustituyendo en las ecuaciones correspondientes, se tiene para este caso:

$$\begin{cases} \vec{r}(t) = \vec{r}_{o'}(t) + \vec{r}'(t) \\ \vec{v}(t) = \vec{v}_{o'}(t) + \vec{v}'(t) \\ \vec{a}(t) = \vec{a}_{o'}(t) + \vec{a}'(t) \end{cases}$$

con $\vec{r}'_o(t) = -\vec{r}_{o'}(t), \ \ \vec{v}'_o(t) = -\vec{v}_{o'}(t), \ \ \vec{a}'_o(t) = -\vec{a}_{o'}(t)$

b) Movimiento relativo de traslación pura (MRTP) con velocidad del origen constante:

Este caso es $\vec{v}_{o'}(t) = cte = \vec{v}_{o'}$ y también $\vec{a}_{o'}(t) = 0$, y la variación del radio vector de O' es $\vec{r}_{o'}(t) = \vec{r}_{o'}(t_o) + (t - t_o).\vec{v}_{o'}$

Y las ecuaciones quedan así:

$$\begin{cases} \vec{r}(t) = & \vec{r}_{o'}(t_o) + (t - t_o).\vec{v}_{o'} + & \vec{r}\,'(t) \\ \vec{v}(t) = & \vec{v}_{o'} + & \vec{v}\,'(t) \\ \vec{a}(t) = & \vec{a}\,'(t) & \end{cases}$$

c) Movimiento relativo de rotación pura (MRRP) con velocidad del origen nula:

En este caso es $\vec{\omega}(t) \neq \vec{0}$, $\vec{v}_{o'}(t) = \vec{0}$, $\vec{a}_{o'}(t) = \vec{0}$

Por tanto las magnitudes cinemáticas correspondientes quedan así:

$$\begin{cases} \vec{r}(t) = \vec{r}_{o'}(t) + \vec{r}\,'(t) \\ \vec{v}(t) = \vec{v}\,'(t) + \vec{\omega}(t) \wedge \vec{r}\,'(t) \\ \vec{a}(t) = \vec{a}\,'(t) + 2.\vec{\omega}(t) \wedge \vec{v}\,'(t) + \vec{\alpha}(t) \wedge \vec{r}\,'(t) + \vec{\omega}(t) \wedge \left[\vec{\omega}(t) \wedge \vec{r}\,'(t)\right] \end{cases}$$

## 5. Problemas:

### 5.1. Enunciados:

1. Estudiar el caso general del movimiento rectilíneo. Como aplicación, encontrar la dependencia temporal de la posición x(t) para (a) un movimiento rectilíneo y uniforme, (b) un movimiento uniformemente acelerado.

2. Una partícula se desplaza a lo largo del eje X de acuerdo con la ley:

$$x(t) = t^3 - 3t^2 - 9t + 5$$

donde t se mide en segundos y x en metros.

a) Hallar los intervalos de tiempo durante los cuales la partícula se mueve en la dirección positiva o en la dirección negativa del eje X.

b) Determinar los intervalos de tiempo durante los cuales el movimiento es acelerado o retardado.

3. Considérese que la velocidad de una partícula varía con el tiempo de acuerdo con ley $\vec{v}(t) = \vec{v}_o(1 - t/\tau)$ donde es $\tau$ una constante positiva. Encontrar en función del tiempo (a) el vector desplazamiento de la partícula y (b) la distancia recorrida sobre la trayectoria.

4. La cabina de un ascensor de altura h asciende con una aceleración a. En un cierto momento se desprende la lampara del techo. Calcular el tiempo que tarda la lámpara en chocar contra el suelo del ascensor.

5. Una partícula se mueve sobre la curva $y(x) = 3x^2$ (Sistema Internacional) con velocidad constante de 1 m/s. Un foco luminoso colocado en el punto (6,0), medidas esas coordenadas en m, sigue al móvil proyectando una sombra sobre el eje OY. Determinar la velocidad de esa sombra cuando la partícula se encuentra en el punto de abcisa 1 m.

6. Una partícula se mueve sobre el plano OXY desde el origen x= y = 0 con una velocidad $\vec{v}(x) = a.\vec{e}_1 + b.x.\vec{e}_2$, donde a y b son constantes. Encontrar la ecuación explícita de la trayectoria y = y(x).

7. Una escalera AB de longitud $\alpha$ está a poyada contra una pared vertical OA (ver figura). El pie B de la escalera desliza con velocidad constante $\vec{v}_o$. Comprobar que el punto medio de la escalera describe un arco de circunferencia de circunferencia de centro O y de radio $\alpha/2$. Encontrar la velocidad $\vec{v}(t)$ del punto medio M de la escalera hasta que cae.

8. La aceleración de un cuerpo que se desplaza a lo largo del eje x es a(x)=-$w^2$.x. Suponiendo que v=$v_o$ cuando x=0, encontrar la velocidad en cualquier otra posición, así como la dependencia temporal de la posición. Repetir el problema si a(x)=+$w^2$.x.

9. Un tranvía se mueve en línea recta desde la parada A hasta la siguiente parada B con una aceleración que varía según la ley a(x)= -$a_o$ – cx, donde $a_o$ y c son constantes positivas y x es su distancia a la parada A. Encontrar la distancia entre ambas paradas y la velocidad máxima del tranvía.

10. Una partícula se encuentra inicialmente en el origen de un sistema de referencia dado, y su velocidad en ese instante $v_o$ está contenida en el plano OXY, formando un ángulo $\alpha$ con el eje x. Su aceleración es totalmente debida a la gravedad, $\vec{a} = \vec{g}$ , y en ese sistema de referencia $\vec{g} = -g.\vec{e}_2$ . Determina (a) la posición de la partícula como función del tiempo, (b) el valor máximo alcanzado por la coordenada y, (c) la distancia hasta el origen desde el punto en que la partícula vuelve a cruzar el eje x y (d) las componentes intrínsecas de la aceleración en todo instante de tiempo.

11. En un punto B se deja caer desde el reposo una esfera. En el mismo instante, desde otro punto A, situado al mismo nivel que B y a una distancia d de éste, se dispara un proyectil con una velocidad inicial de módulo $v_o$. Tras un cierto intervalo de tiempo, la esfera y el proyectil colisionan. Calcular las componentes horizontal y vertical de las velocidades del proyectil y de la esfera inmediatamente antes del impacto.

12. A continuación se listan supuestos casos de movimiento. De ellos, algunos son posibles y otros no. Identificar los casos posibles, indicando qué tipo de movimiento representan, y razonar porqué son imposibles los restantes casos:
    a) $|\vec{v}| = cte, \vec{v} \neq cte \;\; y \;\; \vec{a}_N = 0$
    b) $|\vec{v}| = cte, \vec{a}_T = 0 \;\; y \;\; \vec{a}_N \neq 0$
    c) $|\vec{v}| = cte, \vec{v} \neq cte \;\; y \;\; \vec{a}_T \neq 0$
    d) $|\vec{v}| \neq cte, \vec{v} = cte$
    e) $|\vec{v}| \neq cte, \vec{a} \neq cte$

13. Una partícula se mueve de tal forma que
$$\vec{r}(t) = (t^3 - 4t).\vec{e}_1 + (t^2 + 4t).\vec{e}_2 + (8t^2 - 3t^3).\vec{e}_3$$
Hallar las componentes tangencial y normal de su aceleración para t = 2. (Todo en el Sistema Internacional).

14. Una partícula se lanza, desde una altura h, con una velocidad horizontal $\vec{v}_o$ y se mueve bajo la acción de la gravedad. Hallar el radio de curvatura de la trayectoria descrita por la partícula así como las aceleraciones tangencial y normal en términos de $\vec{g}, \vec{v}_o$ y la velocidad $\vec{v}$ de la partícula en cualquier instante.

15. Un punto se mueve de manera decelerada por una circunferencia de radio R, de modo que sus aceleraciones tangencial y normal tienen igual módulo en todo instante de tiempo. Si en el instante inicial se le comunicó al punto una velocidad de módulo $v_o$ encontrar los módulos de la velocidad y de la aceleración total en función del recorrido s sobre la trayectoria.

16. Un punto se mueve en una trayectoria plana, de forma que su aceleración tangencial $\vec{a}_T(t) = c.\vec{u}_T(t)$, y su aceleración normal $\vec{a}_N(t) = b.t^4.\vec{u}_N(t)$, donde b y c son constantes positivas y t es el tiempo. Si el punto parte del reposo en t=0, encontrar el radio de curvatura y la aceleración total en función del recorrido s sobre la curva.

17. Un móvil inicia una trayectoria circular de radio 5m, siendo su aceleración angular constante $|\vec{a}| = 6s^{-2}$. Calcular las magnitudes de las aceleraciones tangencial, normal y total cuando ha transcurrido un segundo.

18. Una partícula se mueve a lo largo de una curva plana cuya ecuación en coordenadas polares es $r(\theta) = r_o.e^{\theta}$, donde $\theta(t) = w.t$ con w una constante positiva. Encontrar $\vec{v}(t), \vec{a}_T(t), \vec{a}_N(t)\ \ y\ \rho(t)$ en coordenadas polares.

19. Considérese un río que fluye en la dirección del eje X respecto a un observador en la orilla, y una barca que cruza el río con velocidad constante $\vec{u}$ en la dirección del eje Y, medida por un observador que se mueve con la corriente. La anchura del río es d y en el viaje entre las dos orillas la barca es arrastrada una distancia l en la dirección de la corriente según el observador de la orilla. Hallar (a) la velocidad de la corriente y (b) el tiempo que tarda la barra en cruzar el río.

20. Un autobús que parte del reposo puede adquirir una velocidad constante $\vec{v}_1$ en un intervalo de tiempo $\Delta$t. Un pasajero sube al autobús por su parte posterior y avanza hacia la parte delantera del mismo con una velocidad constante $\vec{v}_2$ con respecto al autobús. Otro pasajero desea bajar y avanza desde la parte delantera hasta la parte posterior con una velocidad $\vec{v}_3$, también respecto al autobús. Hallar durante la arrancada (que se considera un movimiento uniformemente acelerado), y cuando él marcha a velocidad constante (a) la velocidad y aceleración del pasajero que sube con respecto a un observador parado en la acera, (b) la velocidad y aceleración del pasajero que quiere bajarse respecto al mismo observador y (c) la velocidad y aceleración del pasajero que sube respecto del que quiere bajarse.

21. Sobre el plato de un tocadiscos que gira con velocidad angular constante e igual a $\vec{\omega}$, se encuentra una partícula situada a una distancia $r_1$ del eje de giro. Calcular la velocidad y la aceleración en un sistema de referencia ligado al cuerpo del tocadiscos (a) cuando la partícula está en reposo respecto al plato, (b) cuando se mueve radialmente hacia fuera con velocidad $\vec{u}$ (respecto al plato) y (c) cuando se mueve circularmente sobre el plato en torno al eje de giro con una velocidad angular $\vec{\varpi}'$ (respecto al plato).

22. Una partícula se mueve a lo largo del borde de un disco circular de radio R con velocidad constante $\vec{v}$ respecto al mismo. Este disco está girando alrededor de un eje perpendicular a él que pasa por su centro, respecto a cierto observador $\Gamma$. Si en un instante de tiempo dado la velocidad angular del disco es $\vec{\varpi}_1$ y la aceleración angular es $\vec{\alpha}_1$ oponiéndose ambas al movimiento de la partícula sobre el disco, (a) hallar en ese instante la velocidad y la aceleración de la partícula respecto del observador $\Gamma$ y (b) si en dicho instante de tiempo la partícula se desprende del disco, ¿en qué dirección saldría?.

23. Una grúa de construcción gira sobre su eje con velocidad angular constante $\vec{\varpi}$. Por su brazo se desplaza alejándose del eje con una velocidad constante $\vec{u}$ un carro del que pende un peso que está elevándose con velocidad $\vec{v}_1$ (constante) respecto de él. En un instante de tiempo determinado el peso se encuentra a una distancia $d_1$ del eje de la grúa y a una distancia $d_2$ sobre el suelo. Calcular el radio de curvatura de la trayectoria del peso que, en ese instante, mide un observador quieto en el suelo.

## 5.2. Resolución de los problemas:

1. Estudiar el caso general del movimiento rectilíneo. Como aplicación, encontrar la dependencia temporal de la posición x(t) para (a) un movimiento rectilíneo y uniforme, (b) un movimiento uniformemente acelerado.

----- -----

Supongamos, por simplificar, que el movimiento rectilineo se realiza a lo largo del eje x. Se tiene:

$$\vec{r}(t) = \left(x(t),0,0\right),\ \ \vec{v}(t) = \left(\dot{x}(t),0,0\right),\ \ \vec{a}(t) = \left(\ddot{x}(t),0,0\right)$$

Se tiene:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \Rightarrow \vec{r}(t) - \vec{r}(t_o) = \int_{t_o}^{t} \vec{v}(t).dt \Rightarrow \vec{r}(t) = \vec{r}(t_o) + \int_{t_o}^{t} \vec{v}(t).dt$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \Rightarrow \vec{v}(t) - \vec{v}(t_o) = \int_{t_o}^{t} \vec{a}(t').dt' \Rightarrow \vec{v}(t) = \vec{v}(t_o) + \int_{t_o}^{t} \vec{a}(t').dt'$$

O sea:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_o) + \int_{t_o}^{t} \vec{v}(t).dt$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(t_o) + \int_{t_o}^{t} \vec{a}(t').dt'$$

Sustituyendo la velocidad en la expresión del radio vector:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_o) + \int_{t_o}^{t} \left[ \vec{v}(t_o) + \int_{t_o}^{t} \vec{a}(t').dt' \right].dt = \vec{r}(t_o) + \vec{v}(t_o).(t - t_o) + \int_{t_o}^{t} \left[ \int_{t_o}^{t} \vec{a}(t').dt' \right].dt$$

En definitiva:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_o) + \vec{v}(t_o).(t - t_o) + \int_{t_o}^{t} \left[ \int_{t_o}^{t} \vec{a}(t').dt' \right].dt$$

Aplicación:

(a) Movimiento rectílineo uniforme: $\vec{v}(t) = cte = \vec{v}(t_o) \Rightarrow \vec{a}(t) = \vec{0}$

Se tiene, en este caso:

$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_o) + \int_{t_o}^{t} \vec{v}(t).dt = r(t_o) + \vec{v}(t_o).(t - t_o)$ , por tanto:

$$\boxed{\begin{gathered} \vec{r}(t) = r(t_o) + \vec{v}(t_o).(t - t_o) \\ (x(t),0,0) = (x(t_o),\ 0,\ 0) + (\dot{x}(t_o).(t - t_o),\ 0,\ 0) \end{gathered}}$$

(b) Movimiento uniformemente acelerado:

$$\vec{a}(t) = cte \Rightarrow \vec{v}(t) = \vec{v}(t_o) + \vec{a}(t_o).(t - t_o)$$

Y en este caso es:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_o) + \int_{t_o}^{t} \vec{v}(t).dt = \vec{r}(t_o) + \int_{t_o}^{t} \left[\vec{v}(t_o) + \vec{a}(t_o).(t - t_o)\right].dt =$$

$$= \vec{r}(t_o) + \vec{v}(t_o).(t - t_o) + \frac{1}{2}\vec{a}(t_o).(t - t_o)^2$$

Por tanto:

$$\boxed{\begin{gathered} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_o) + \int_{t_o}^{t} \vec{v}(t).dt \\ \vec{r}(t) = \vec{r}(t_o) + \vec{v}(t_o).(t - t_o) + \frac{1}{2}\vec{a}(t_o).(t - t_o)^2 \end{gathered}}$$

Y por ser rectilíneo a lo largo del eje x:

$$\boxed{(x(t),0,0) = (x(t_o) + \dot{x}(t_o).(t - t_o) + \frac{1}{2}\ddot{x}(t_o).(t - t_o)^2,\ 0,\ 0)}$$

2. Una partícula se desplaza a lo largo del eje X de acuerdo con la ley:

$$x(t) = t^3 - 3t^2 - 9t + 5$$

donde t se mide en segundos y x en metros.

c) Hallar los intervalos de tiempo durante los cuales la partícula se mueve en la dirección positiva o en la dirección negativa del eje X.

d) Determinar los intervalos de tiempo durante los cuales el movimiento es acelerado o retardado.

------ ----

Es un caso de movimiento rectilíneo.

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = (\dot{x}(t),0,0)$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_o) + \int_{t_o}^{t} \vec{v}(t).dt$$

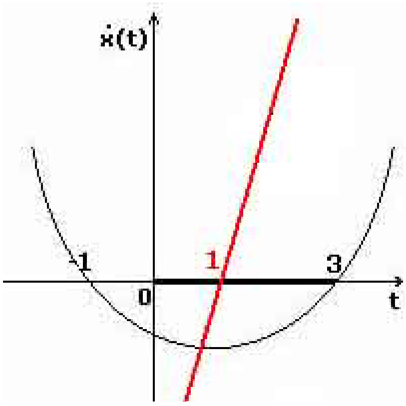
$$\vec{v}(t) = \vec{v}(t_o) + \int_{t_o}^{t} \vec{a}(t').dt'$$

En este caso, será:

$$x(t) = t^3 - 3t^2 - 9t + 5,\ \ \dot{x}(t) = 3t^2 - 6t - 9,\ \ \ddot{x}(t) = 6t - 6$$

a) Los intervalos de tiempo durante los cuales la partícula se mueve en la dirección positiva o en la dirección negativa del eje X son aquellos en donde la velocidad es positiva o negativa, respectivamente

Representando la parábola $\dot{x}(t) = 3t^2 - 6t - 9$, se tendrá:




Por tanto:

Será negativa la velocidad desde el instante cero hasta los 3 segundos, y será positiva a partir de los 3 segundos.

b) Los intervalos de tiempo durante los cuales el movimiento es acelerado o retardado son aquellos en los que la aceleración tiene, respectivamente, el mismo sentido o sentido contrario, de la velocidad

como es: $\ddot{x}(t) = 6t - 6$, si es 6t – 6 > 0 → t > 1 y si es 6t – 6 < 0 → t<1

Por tanto, la aceleración será negativa desde el instante inicial hasta el primer segundo, y será positiva a partir del primer segundo. Esto nos indica que tiene el mismo sentido que la velocidad hasta el primer segundo, que tiene sentido contrario a la velocidad entre el primer segundo y el tercer segundo, y que tiene el mismo sentido de la velocidad nuevamente a partir del tercer segundo.

**Por tanto, el movimiento será acelerado hacia la izquierda desde el instante cero hasta el primer segundo, retardado hacia la izquierda entre el segundo 1 y 3, y, finalmente, acelerado hacia la derecha a partir del segundo 3.**

3. Considérese que la velocidad de una partícula varía con el tiempo de acuerdo con ley $\vec{v}(t) = \vec{v}_o(1 - t/\tau)$ donde es $\tau$ una constante positiva. Encontrar en función del tiempo (a) el vector desplazamiento de la partícula y (b) la distancia recorrida sobre la trayectoria.

--- ---

a)

$$\vec{r}(t) - \vec{r}(t_o) = \int_{t_o}^{t} \vec{v}(t).dt = \int_{t_o}^{t} \vec{v}_o\left(1 - \frac{t}{\tau}\right).dt = \vec{v}_o.(t - t_o).\left(1 - \frac{(t + t_o)}{2\tau}\right)$$

o sea:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_o) + \vec{v}_o.(t - t_o).\left(1 - \frac{(t + t_o)}{2\tau}\right)$$

Si el tiempo inicial es cero ($t_o$=0):

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \vec{v}_o.t.\left(1 - \frac{t}{2\tau}\right)$$

b) Sabemos que la derivada del arco con respecto al tiempo es el módulo del vector velocidad:

$$\frac{dS(t)}{dt} = \left|\vec{v}(t)\right| \Rightarrow dS(t) = \left|\vec{v}(t)\right|.dt = \left|\vec{v}_o t(1 - \frac{t}{\tau})\right| \Rightarrow S(t) = S(t_o) + \int_{t_o}^{t}\left|\vec{v}_o t(1 - \frac{t}{\tau})\right|.dt$$

Para evaluar esta integral es necesario analizar el valor absoluto:

- Si $t<\tau \rightarrow 1-t/\tau >0$, por lo cual es $\left|\vec{v}_o(1 - t/\tau)\right| = \left|\vec{v}_o\right|(1 - t/\tau)$

$$S(t) = S(t_o) + \int_{t_o}^{t}\left|\vec{v}_o\right|(1 - \frac{t}{\tau})dt$$ , resultando:

$$S(t) = S(t_o) + \left|\vec{v}_o\right|(t - t_o).\left(1 - \frac{t + t_o}{2\tau}\right)$$ , o bien, si es $t_o$ = 0 y el arco recorrido en el instante inicial es también nulo (S(0)=0):

$$\boxed{S(t) = \left|\vec{v}_o\right| t.\left(1 - \frac{t}{2\tau}\right)}$$

- Si es $t>\tau \rightarrow 1-t/\tau <0$, por lo cual es $\left|\vec{v}_o(1 - t/\tau)\right| = \left|\vec{v}_o\right|(t/\tau - 1)$

En este caso, la integral es necesario hacerla desde el inicio hasta $\tau$ y desde $\tau$ hasta t, pues la velocidad tiene expresión diferente en ambos intervalos:

$$S(t) = S(t_o) + \int_{t_o}^{\tau}\left|\vec{v}_o\right|(1 - \frac{t}{\tau}).dt + \int_{\tau}^{t}\left|\vec{v}_o\right|(\frac{t}{\tau} - 1).dt$$

Si es $t_o$ = 0:

$$S(t) = S(0) + |\vec{v}_o|.\left(\tau - \frac{\tau^2}{2\tau}\right) + |\vec{v}_o|.\left(\frac{t^2 - \tau^2}{2\tau} - (t - \tau)\right) =$$

$$= S(0) + |\vec{v}_o|.\tau + |\vec{v}_o|.t.\left(\frac{t}{2\tau} - 1\right)$$

Si también es S(0) =0, o sea, si el arco recorrido en el instante inicial es cero:

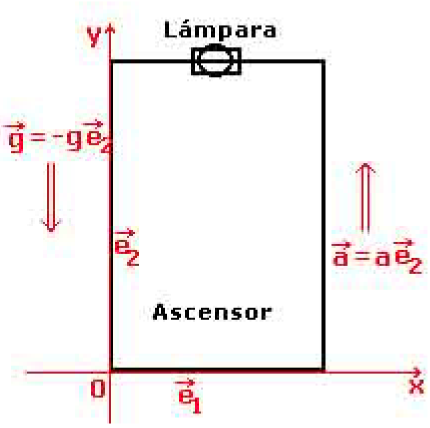
$$\boxed{S(t) = |\vec{v}_o|.\tau + |\vec{v}_o|.t.\left(\frac{t}{2\tau} - 1\right)}$$

En resumen:

Si $t<\tau$: $S(t) = |\vec{v}_o|t.\left(1 - \frac{t}{2\tau}\right)$

Si $t>\tau$: $S(t) = |\vec{v}_o|.\tau + |\vec{v}_o|.t.\left(\frac{t}{2\tau} - 1\right)$

4. La cabina de un ascensor de altura h asciende con una aceleración a. En un cierto momento se desprende la lampara del techo. Calcular el tiempo que tarda la lámpara en chocar contra el suelo del ascensor.




Ascensor:

$$\vec{v}_A(t_o) = \vec{v}_o = v_o.\vec{e}_2$$
$$\vec{v}_A(t) = (v_o + a.t).\vec{e}_2$$
$$\vec{r}_A(t) = (v_o t + \frac{1}{2}.a.t^2).\vec{e}_2$$

Lámpara:

$$\vec{v}_L(t_o) = v_o.e_2$$
$$\vec{v}_L(t) = (v_o - g.t).\vec{e}_2$$
$$\vec{r}_L(t) = (h + v_o.t - \frac{1}{2}g.t^2).\vec{e}_2$$

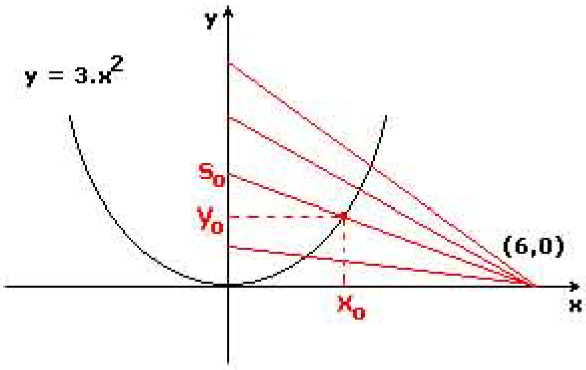
El impacto de la lámpara en el suelo del ascensor se producirá cuando $\vec{r}_A(t) = \vec{r}_L(t)$ :

$$v_o t + \frac{1}{2}a.t^2 = h + v_o.t - \frac{1}{2}g.t^2 \Rightarrow \frac{1}{2}(a+g).t^2 = h$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{a+g}}$$

5. Una partícula se mueve sobre la curva $y(x) = 3x^2$ (Sistema Internacional) con velocidad constante de 1 m/s. Un foco luminoso colocado en el punto (6,0), medidas esas coordenadas en m, sigue al móvil proyectando una sombra sobre el eje OY. Determinar la velocidad de esa sombra cuando la partícula se encuentra en el punto de abcisa 1 m.

------ ------




$s_0$: Sombra proyectada por el punto $(x_0, y_0)$.

Por el Teorema de Thales:

$$\frac{6}{s_o} = \frac{6 - x_o}{y_o}$$

Despejando la sombra $s_o$:

$$s_o = \frac{6.y_o}{6 - x_o} = \frac{6.3.x_o^2}{6 - x_o} = \frac{18.x_o^2}{6 - x_o}$$

Velocidad de la sombra sombre el eje y:

$$v_{sombra} = \frac{ds_o}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{18.x_o^2}{6 - x_o}\right) = \frac{36.x_o(6 - x_o) - (-1).18.x_o^2}{(6 - x_o)^2}\cdot\frac{dx_o}{dt} =$$

$$= \frac{-18.x_o^2 + 216.x_o}{(6 - x_o)^2}\cdot\frac{dx_o}{dt}$$

Para $x_o = 1$: $v_{sombra} = \frac{198}{25}\cdot\frac{dx_o}{dt}$ , Y siendo la derivada del arco:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \Rightarrow ds^2 = dx^2 + (6x)^2.dx^2 = \left[1 + 36.x^2\right]dx^2 \Rightarrow ds = \sqrt{1 + 36.x^2}.dx$$

por lo cual la velocidad de la partícula sobre la trayectoria es:

$$\frac{ds}{dt} = |v_o| = \sqrt{1 + 36.x_o^2}.\frac{dx_o}{dt} = 1$$

en consecuencia:

$$\frac{dx_o}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1 + 36.1}} = \frac{1}{\sqrt{37}}$$

$$v_{sombra} = \frac{198}{25}\cdot\frac{dx_o}{dt} = \frac{198}{25}\cdot\frac{1}{\sqrt{37}}\,m/s = \frac{198.\sqrt{37}}{925}\,m/s$$

6. Una partícula se mueve sobre el plano OXY desde el origen x= y = 0 con una velocidad $\vec{v}(x) = a.\vec{e}_1 + b.x.\vec{e}_2$, donde a y b son constantes. Encontrar la ecuación explícita de la trayectoria y = y(x).

---- ----

$$\vec{v}(x) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \dot{x}(t).\vec{e}_1 + \dot{y}(t).\vec{e}_2 = a.\vec{e}_1 + b.x.\vec{e}_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = a \\ \dot{y}(t) = bx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = a.dt \\ dy = bx.dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = a.t \\ y = \int b.a.t.dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = at \\ y = \dfrac{ab}{2}t^2 \end{cases}$$

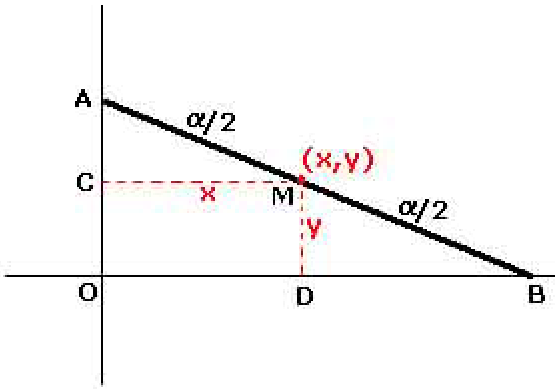
De forma explícita, eliminando el tiempo:

$$y = \frac{ab}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^2 = \frac{ab}{2a^2}x^2 = \frac{b}{2a}.x^2$$

$$\boxed{y = \frac{b}{2a}.x^2}$$

7. Una escalera AB de longitud $\alpha$ está a poyada contra una pared vertical OA (ver figura). El pie B de la escalera desliza con velocidad constante $\vec{v}_o$. Comprobar que el punto medio de la escalera describe un arco de circunferencia de circunferencia de centro O y de radio $\alpha/2$. Encontrar la velocidad $\vec{v}(t)$ del punto medio M de la escalera hasta que cae.

--- ----




Para probar que el centro (x, y) de la escalera se desplaza a lo largo de una circunferencia de radio $\alpha/2$ es necesario probar que se verifica la ecuación de la circunferencia de centro en el origen O:

$$x^2 + y^2 = (\frac{\alpha}{2})^2$$

Para comprobarlo veamos en la figura que los triángulos AOM y MDB son iguales pues ambos tienen la hipotenusa igual y el también tienen los tres ángulos iguales. Por tanto, aplicando el Teorema de Pitágoras en cualquiera de los dos:

$$x^2 + y^2 = (\frac{\alpha}{2})^2$$

Para determinar la velocidad del punto medio M de la escalera, determinaremos su velocidad angular, puesto que sigue un movimiento circular con velocidad constante. Para ello determinaremos el ángulo recorrido en el tiempo en que la escalera se desliza totalmente. Una vez calculada la velocidad angular, la velocidad pedida será el producto de dicha velocidad angular por el radio ($\alpha/2$) de la trayectoria.

Cuando la escalera está pegada totalmente a la pared (vertical) y comienza a deslizarse hasta quedar totalmente tumbada, el centro M habrá recorrido en total 90º ($\pi/2$ radianes), por lo que, si partimos de una posición previa OB y comienza a deslizarse hasta quedar tumbada totalmente con velocidad constante vo, el pie B de la escalera habrá recorrido la distancia $\alpha$-OB en el tiempo $t = \alpha - OB / V_O$, mientras el centro M recorre un ángulo $\phi$ sobre su trayectoria:

$$\frac{\phi}{\pi/2} = \alpha - OB/\alpha \Rightarrow \phi = \frac{(\alpha - OB).\pi}{2.\alpha} = \frac{v_o t\pi}{2\alpha}$$

Por tanto, la velocidad será la angular por el radio:

$$v(t) = \frac{\phi}{t}.\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{4}.v_o$$

8. La aceleración de un cuerpo que se desplaza a lo largo del eje x es $a(x)=-w^2.x$. Suponiendo que $v=v_o$ cuando $x=0$, encontrar la velocidad en cualquier otra posición, así como la dependencia temporal de la posición. Repetir el problema si $a(x)=+w^2.x$.

---- ----

Puesto que la aceleración la tenemos en función de x, y no del tiempo, interesa ver de que manera podemos introducir el tiempo:

De la expresión de la velocidad:

$$\frac{dx(t)}{dt}=v[x(t)]\Rightarrow dt=\frac{dx(t)}{[v(x(t)]}\Rightarrow\int_{t_o}^{t}dt=\int_{x_o}^{x}\frac{dx(t)}{v[x(t)]}\Rightarrow t-t_o=\int_{x_o}^{x}\frac{dx(t)}{v[x(t)]}$$

O sea, tenemos el tiempo en función de la velocidad:

$$t-t_o=\int_{x_o}^{x}\frac{dx(t)}{v[x(t)]}$$

Por otra parte, la velocidad podemos derivarla con respecto al x(t):

$$\frac{d}{dx(t)}v^2[x(t)]=\frac{d}{dt}v^2[x(t)].\frac{dt}{dx(t)}=\frac{1}{v[x(t)]}.\frac{d}{dt}v^2[x(t)]=\frac{2v[x(t)]}{v[x(t)]}.\frac{dv[x(t)]}{dt}=2.a[x(t)]=-2\varpi^2.x(t)$$

O sea:

$$dv^2[x(t)]=-2\varpi^2.x(t).dx(t)$$

Integrando:

$$\int_{v_o}^{v(x)}dv^2(x)=\int_0^x-2\varpi^2x.dx\Rightarrow v^2(x)-v_o^2=-\varpi^2.x\Rightarrow v(x)=\sqrt{v_o^2-\varpi^2x^2}$$

Sustituyendo en la expresión del tiempo e integrando:

$$t-t_o=\int_0^{x(t)}\frac{dx}{\sqrt{v_o^2-\varpi^2x^2}}=\frac{1}{v_o}\int_0^{x(t)}\frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{\varpi x}{v_o}\right)^2}}=\frac{1}{\varpi}\int_0^{x(t)}\frac{d\left(\frac{\varpi x}{v_o}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{\varpi x}{v_o}\right)^2}}=\frac{1}{\varpi}\int^{\frac{\varpi x}{v_o}}\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}=$$

$$=\frac{1}{\varpi}.arcsen\,\tau\Big|_0^{\frac{\varpi x}{v_o}}=\frac{1}{\varpi}.arcsen\left(\frac{\varpi x}{v_o}\right)$$

Por tanto, es:

$$\varpi(t-t_o)=arcsen\left(\frac{\varpi x}{v_o}\right)\Rightarrow sen(\varpi(t-t_o))=\frac{\varpi x}{v_o}\Rightarrow x(t)=\frac{v_o}{\varpi}sen(\varpi(t-t_o))$$

Entonces, se tiene:

$$x(t) = \frac{v_o}{\varpi} sen\big(\varpi(t - t_o)\big)$$
$$\dot{x}(t) = v_o \cos\big(\varpi(t - t_o)\big)$$
$$\ddot{x}(t) = -\varpi.v_o sen\big(\varpi(t - t_o)\big) = -\varpi^2 \left(\frac{v_o}{\varpi}\right).sen\big(\varpi(t - t_o)\big) = .-\varpi^2.x$$

9. Un tranvía se mueve en línea recta desde la parada A hasta la siguiente parada B con una aceleración que varía según la ley a(x)= $a_o$ – cx, donde $a_o$ y c son constantes positivas y x es su distancia a la parada A. Encontrar la distancia entre ambas paradas y la velocidad máxima del tranvía.

---- -----

El tranvía sale de la parada A iniciando en ese momento el movimiento, es decir, es $v(x_A)=0$ y vuelve a pararse al llegar a B, siendo, pues, en ese momento $v(x_B)=0$.

De ser

$$\frac{d}{dx(t)}v^2[x(t)] = \frac{d}{dt}v^2[x(t)].\frac{dt}{dx(t)} = \frac{1}{v[x(t)]}.\frac{d}{dt}v^2[x(t)] = \frac{2v[x(t)]}{v[x(t)]}.\frac{dv[x(t)]}{dt} = 2.a[x(t)]$$

Por tanto, es:

$$dv^2(x) = 2.a(x).dx \Rightarrow v^2(x) - v_A{}^2 = \int_0^x 2.(a_o - c.x).dx = 2x\left(a_o - \frac{1}{2}c.x\right)$$

Como $V_A(x)=0$, pues se inicia el movimiento en esa parada, se tendrá:

$$v^2(x) = 2x\left(a_o - \frac{1}{2}c.x\right) \Rightarrow v(x) = \sqrt{2x\left(a_o - \frac{1}{2}c.x\right)}$$

Puesto que la velocidad se anula en cada parada podemos encontrar la distancia x igualando a cero la velocidad:

$$v^2(x) = 2x\left(a_o - \frac{1}{2}cx\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \dfrac{2a_o}{c} \end{cases}$$

La primera solución corresponde a la parada A, desde donde se inicia el recorrido, y la segunda, a la parada B, final del trayecto. Por tanto, la distancia entre ambas paradas es $x = 2a_o/c$.

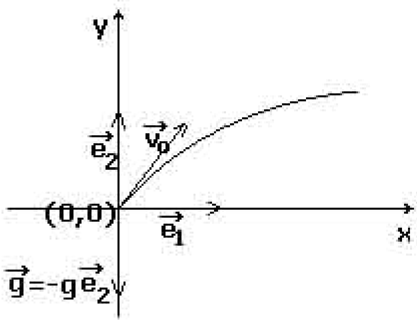
La velocidad máxima tendrá lugar donde la curva $v^2(x) = 2x\left(a_o - \frac{1}{2}c.x\right)$ tenga un máximo, es decir, en $2a_o - 2cx = 0 \Rightarrow x = \frac{a_o}{c}$. Por tanto, la velocidad máxima verificaría:

$$v_{max}{}^2 = 2.\frac{a_o}{c}\left(a_o - \frac{1}{2}c.\frac{a_o}{c}\right) = \frac{a_o^2}{c} \Rightarrow v_{max} = \frac{a_o}{\sqrt{c}}$$

$$v_{max} = \frac{a_o}{\sqrt{c}}$$

10. Una partícula se encuentra inicialmente en el origen de un sistema de referencia dado, y su velocidad en ese instante $v_o$ está contenida en el plano OXY, formando un ángulo $\alpha$ con el eje x. Su aceleración es totalmente debida a la gravedad, $\vec{a} = \vec{g}$, y en ese sistema de referencia $\vec{g} = -g.\vec{e}_2$. Determina (a) la posición de la partícula como función del tiempo, (b) el valor máximo alcanzado por la coordenada y, (c) la distancia hasta el origen desde el punto en que la partícula vuelve a cruzar el eje x y (d) las componentes intrínsecas de la aceleración en todo instante de tiempo.

--- ---




$$\vec{v}_o = |\vec{v}_o| \cos\alpha.\vec{e}_1 + |\vec{v}_o| sen\alpha.\vec{e}_2$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_o + \vec{g}.t$$

$$\vec{r}(t) = \vec{v}_o.t + \frac{1}{2}.\vec{g}.t^2$$

$$\vec{v}(t) = |\vec{v}_o| \cos\alpha.\vec{e}_1 + \left(|\vec{v}_o| sen\alpha - g.t\right).\vec{e}_2$$

$$\vec{r}(t) = |\vec{v}_o| \cos\alpha.t.\vec{e}_1 + \left(|\vec{v}_o| sen\alpha - \frac{1}{2} g.t^2\right).\vec{e}_2$$

Y se tiene, para los componentes del vector de posición:

$$x(t) = |\vec{v}_o|.\cos\alpha$$
$$y(t) = |\vec{v}_o|.sen\alpha - \frac{1}{2} g.t^2$$

Eliminando el tiempo entre las dos:

$$t = \frac{x}{|\vec{v}_o|.\cos\alpha}$$

$$y = tg\alpha.x - \frac{g}{2|\vec{v}_o|^2.\cos^2\alpha}.x^2$$

O sea, aparece la curva de la trayectoria como una parábola de la forma

$$y = A.x - B.x^2$$

donde hemos llamado: $A = tg\alpha$ $\quad B = \frac{g}{2|\vec{v}_o|^2.\cos^2\alpha}$

Derivamos para hallar el valor máximo:

$$y' = A - 2B.x_o = 0 \Rightarrow x_o = \frac{A}{2B} = \frac{tg\alpha}{2\frac{g}{2|\vec{v}_o|^2.\cos^2\alpha}} = \frac{|\vec{v}_o|^2.sen\alpha.\cos\alpha}{g}$$

Sustituyendo:

$$y_{máx} = A.x_o - B.x_o^{\,2} = tg\alpha.\frac{|\vec{v}_o|^2.sen\alpha.\cos\alpha}{g} - \frac{g}{2|\vec{v}_o|^2.\cos^2\alpha}.\frac{|\vec{v}_o|^4.sen^2\alpha.\cos^2\alpha}{g^2}$$

O sea, simplificando:

$$y_{máx} = \frac{|\vec{v}_o|^2}{g}\left(sen\alpha - \frac{1}{2}sen^2\alpha\right)$$

La distancia al origen:

$$y = A.x - B.x^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_{\min} = 0 \\ x_{\max} = \dfrac{A}{B} \end{cases}$$

El punto por donde la partícula vuelve a cruzar el eje x es, en definitiva:

$$x_{\max} = \frac{tg\alpha}{\dfrac{g}{2|\vec{v}_o|^2\cos^2\alpha}} = \frac{2.tg\alpha.|\vec{v}_o|^2.\cos^2\alpha}{g} = \frac{|\vec{v}_o|^2}{g}.sen(2\alpha)$$

Componentes intrínsecas:

$$|\vec{a}_T| = \frac{|\vec{g}.\vec{v}|}{|\vec{v}|} \qquad |\vec{a}_N| = \frac{|\vec{g}\wedge\vec{v}|}{|\vec{v}_o|}$$

Si llamamos $\vec{v} = m.\vec{e}_1 + n.\vec{e}_2 \rightarrow \begin{cases} m = |\vec{v}_o|.\cos\alpha \\ n = |\vec{v}_o|.sen\alpha - g.t \end{cases}$ $\quad \vec{g} = -g.\vec{e}_2$

Se tiene: $\vec{g}.\vec{v} = -gn$ y tambien $\vec{g}\wedge\vec{v} = \begin{vmatrix} 0 & -g \\ m & n \end{vmatrix}\vec{e}_3 = gm.\vec{e}_3$

Y queda:

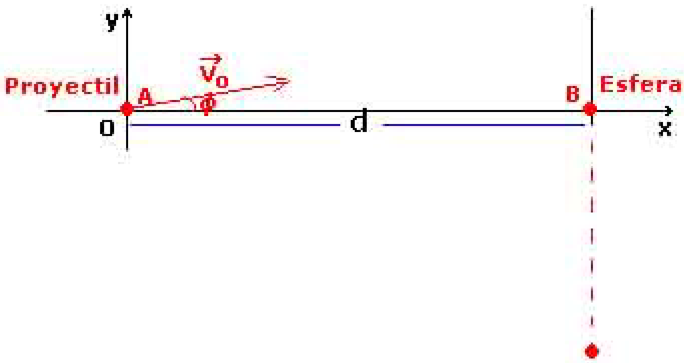
$$|\vec{a}_T| = \frac{|\vec{g}.\vec{v}|}{|\vec{v}_o|} = \frac{gn}{\sqrt{m^2+n^2}} \qquad |\vec{a}_N| = \frac{gm}{\sqrt{m^2+n^2}}$$

$$|\vec{a}_T| = \frac{|\vec{g}.\vec{v}|}{|\vec{v}_o|} = \frac{g(|\vec{v}_o|.sen\alpha - g.t)}{\sqrt{(|\vec{v}_o|.\cos\alpha)^2 + (|\vec{v}_o|.sen\alpha - g.t)^2}}$$

$$|\vec{a}_N| = \frac{|\vec{g}\wedge\vec{v}|}{|\vec{v}_o|} = \frac{g(|\vec{v}_o|.\cos\alpha)}{\sqrt{(|\vec{v}_o|.\cos\alpha)^2 + (|\vec{v}_o|.sen\alpha - g.t)^2}}$$

11. En un punto B se deja caer desde el reposo una esfera. En el mismo instante, desde otro punto A, situado al mismo nivel que B y a una distancia d de éste, se dispara un proyectil con una velocidad inicial de módulo $v_o$. Tras un cierto intervalo de tiempo, la esfera y el proyectil colisionan. Calcular las componentes horizontal y vertical de las velocidades del proyectil y de la esfera inmediatamente antes del impacto.

------




Velocidad y posición del proyectil:

$$\vec{v}_p(t) = \vec{v}_o + \vec{g}.(t - t_o) = v_o \cos\phi.\vec{e}_1 + v_o sen\phi.\vec{e}_2 - g(t - t_o).\vec{e}_2 =$$
$$= v_o \cos\phi.\vec{e}_1 + [v_o sen\phi. - g(t - t_o)].\vec{e}_2$$

$$\vec{r}_p(t) = \vec{r}(t_o) + \vec{v}_o(t - t_o) + \frac{1}{2}\vec{g}.(t - t_o)^2 = 0 + v_o \cos\phi.(t - t_o).\vec{e}_1 + v_o sen\phi.(t - t_o).\vec{e}_2 -$$
$$- \frac{1}{2} g.(t - t_o)^2 \vec{e}_2 = v_o \cos\phi.(t - t_o).\vec{e}_1 + \left[ v_o sen\phi.(t - t_o) - -\frac{1}{2} g.(t - t_o)^2 \right].\vec{e}_2$$

Velocidad y posición de la esfera:

$$\vec{v}_e(t) = \vec{v}_e(t_o) + \vec{g}.(t - t_o) = \vec{0} - g.(t - t_o).\vec{e}_2 = -g.(t - t_o).\vec{e}_2$$

$$\vec{r}_e(t) = \vec{r}_e(t_o) + \vec{v}_e(t_o).(t - t_o) + \frac{1}{2}\vec{g}.(t - t_o)^2 = d.\vec{e}_1 + \vec{0} - \frac{1}{2} g.(t - t_o)^2.\vec{e}_2 =$$
$$= d.\vec{e}_1 - \frac{1}{2}.g(t - t_o)^2.\vec{e}_2$$

El instante t' en el que se produce el impacto será aquel en el que coinciden la posición del proyectil y de la esfera:

$$\begin{cases} v_o \cos\phi.(t'-t_o) = d \\ v_o sen\phi.(t'-t_o) - \frac{1}{2} g.(t'-t_o)^2 = -\frac{1}{2} g.(t'-t_o)^2 \end{cases} \Rightarrow v_o sen\phi.(t'-t_o) = 0 \Rightarrow sen\phi = 0$$

O sea, es $\phi = 0$, por tanto, de la otra ecuación: $v_o.(t'-t_o) = d \Rightarrow t'-t_o = \dfrac{d}{v_o}$

Sustituyendo en la expresión de la velocidad:

$$\vec{v}_p(t') = v_o\vec{e}_1 - g(t'-t_o)\vec{e}_2 \Rightarrow \vec{v}_p(t') = v_o.\vec{e}_1 - g.\frac{d}{v_o}.\vec{e}_2$$

$$\vec{v}_e(t') = -g.(t'-t_o).\vec{e}_2 = -g.\frac{d}{v_o}.\vec{e}_2$$

$$\boxed{\begin{gathered}\vec{v}_p(t') = v_o.\vec{e}_1 - g.\frac{d}{v_o}.\vec{e}_2 \\ \vec{v}_e(t') = -g.\frac{d}{v_o}.\vec{e}_2\end{gathered}}$$

12. A continuación se listan supuestos casos de movimiento. De ellos, algunos son posibles y otros no. Identificar los casos posibles, indicando qué tipo de movimiento representan, y razonar porqué son imposibles los restantes casos:
    f) $|\vec{v}| = cte, \vec{v} \neq cte \;\; y \;\; \vec{a}_N = 0$
    g) $|\vec{v}| = cte, \vec{a}_T = 0 \;\; y \;\; \vec{a}_N \neq 0$
    h) $|\vec{v}| = cte, \vec{v} \neq cte \;\; y \;\; \vec{a}_T \neq 0$
    i) $|\vec{v}| \neq cte, \vec{v} = cte$
    j) $|\vec{v}| \neq cte, \vec{a} \neq cte$

-----

a) Si es $|\vec{v}| = cte, \vec{v} \neq cte \;\; y \;\; \vec{a}_N = 0$, se tendría:

$$a_T = \frac{d|\vec{v}|}{dt} = 0 \Rightarrow a_T = 0 \wedge a_N = 0 \Rightarrow \vec{a} = 0$$

Pero $\vec{a} = \vec{0}$ es contradictorio con $\vec{v} \neq cte$. Luego es IMPOSIBLE.

b) Si es $|\vec{v}| = cte, \vec{a}_T = 0 \;\; y \;\; \vec{a}_N \neq 0$

se tiene: $a_T = \frac{d|\vec{v}|}{dt} = 0$, $a_N = \frac{|\vec{v}|^2}{r} \neq 0$, además, por ser constante, corresponde al MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME:

$$\begin{cases} a_T = 0 \\ a_N = -R.\varpi^2 = cte \end{cases}$$

c) Si es $|\vec{v}| = cte, \vec{v} \neq cte \;\; y \;\; \vec{a}_T \neq 0$

Se tiene $a_T = \frac{d|\vec{v}|}{dt} = 0$, lo cual es contradictorio con el dato $\vec{a}_T \neq 0$, luego, esta situación es IMPOSIBLE.

d) Si es $|\vec{v}| \neq cte, \vec{v} = cte$

Siendo $\vec{v} = cte \Rightarrow |\vec{v}| = cte$, lo cual contradice al dato de que $|\vec{v}| \neq cte$, por tanto ese movimiento es IMPOSIBLE.

e) Si es $|\vec{v}| \neq cte, \vec{a} \neq cte$

Este movimiento es el caso más general de un MOVIMIENO CURVILINEO ACELERADO (DECELERADO) SIN UNIFORMIDAD, puesto que la aceleración no es constante.

13. Una partícula se mueve de tal forma que

$$\vec{r}(t) = (t^3 - 4t).\vec{e}_1 + (t^2 + 4t).\vec{e}_2 + (8t^2 - 3t^3).\vec{e}_3$$

Hallar las componentes tangencial y normal de su aceleración para t = 2. (Todo en el Sistema Internacional).

----

Velocidad y aceleración:

$$\vec{v}(t) = \left(3t^2 - 4\right).\vec{e}_1 + \left(2t + 4\right).\vec{e}_2 + \left(16t - 9t^2\right).\vec{e}_3$$
$$\vec{a}(t) = 6t.\vec{e}_1 + 2.\vec{e}_2 + \left(16 - 19t\right).\vec{e}_3$$

Para t=2:

$$\vec{v}(2) = 8.\vec{e}_1 + 8.\vec{e}_2 - 4.\vec{e}_3$$
$$\vec{a}(2) = 12.\vec{e}_1 + 2.\vec{e}_2 - 2.\vec{e}_3$$

Vector unitario tangencial para t=2:

$$\vec{U}_T(2) = \frac{\vec{v}(2)}{\left|\vec{v}(2)\right|} = \frac{2}{3}.\vec{e}_1 + \frac{2}{3}.\vec{e}_2 - \frac{1}{3}.\vec{e}_3$$

Aceleración tangencial para t=2:

$$\vec{a}_T(2) = \left(\vec{a}(2).\vec{U}_T(2)\right).\vec{U}_T(2) = \left(8 + \frac{4}{3} + \frac{2}{3}\right).\left(\frac{2}{3}.\vec{e}_1 + \frac{2}{3}.\vec{e}_2 - \frac{1}{3}.\vec{e}_3\right) = \frac{20}{3}.\vec{e}_1 + \frac{20}{3}.\vec{e}_2 - \frac{10}{3}.\vec{e}_3$$

Aceleración normal para t=2:

$$\vec{a}_N(2) = \vec{a}(2) - \vec{a}_T(2) = 12.\vec{e}_1 + 2.\vec{e}_2 - 2.\vec{e}_3 - \left(\frac{20}{3}.\vec{e}_1 + \frac{20}{3}.\vec{e}_2 - \frac{10}{3}.\vec{e}_3\right) =$$
$$= \frac{16}{3}.\vec{e}_1 - \frac{14}{3}.\vec{e}_2 + \frac{4}{3}.\vec{e}_3$$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{a}_T(2) &= \frac{20}{3}.\vec{e}_1 + \frac{20}{3}.\vec{e}_2 - \frac{10}{3}.\vec{e}_3 \\ \vec{a}_N(2) &= \frac{16}{3}.\vec{e}_1 - \frac{14}{3}.\vec{e}_2 + \frac{4}{3}.\vec{e}_3\end{aligned}}$$

14. Una partícula se lanza, desde una altura h, con una velocidad horizontal $\vec{v}_o$ y se mueve bajo la acción de la gravedad. Hallar el radio de curvatura de la trayectoria descrita por la partícula así como las aceleraciones tangencial y normal en términos de $\vec{g}, \vec{v}_o$ y la velocidad $\vec{v}$ de la partícula en cualquier instante.

----

Suponiendo $t_o = 0$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_o + \vec{g}.t = v_o.\vec{e}_1 - gt\vec{e}_2 \qquad |\vec{v}(t)| = +\sqrt{v_o^2 + g^2t^2} \qquad t = \frac{\sqrt{|\vec{v}(t)|^2 - v_o^2}}{g}$$

$$\vec{a}(t) = \vec{g} = -g.\vec{e}_2$$

$$\vec{r}(t) = \vec{v}_o t + \frac{1}{2}\vec{g}.t^2 = v_o t.\vec{e}_1 - \frac{1}{2}gt^2\vec{e}_2$$

productos escalar y vectorial de la aceleración y la velocidad:

$$|\vec{a}(t).\vec{v}(t)| = g^2t \qquad |\vec{a}(t) \wedge \vec{v}(t)| = g.v_o$$

en función de la velocidad en cualquier instante:

$$|\vec{a}(t).\vec{v}(t)| = g^2t = g.\sqrt{|\vec{v}(t)|^2 - v_o^2} \qquad |\vec{a}(t) \wedge \vec{v}(t)| = g.v_o$$

Módulo de la Aceleración normal:

$$a_N = \frac{|\vec{a}(t) \wedge \vec{v}(t)|}{|\vec{v}(t)|} = \frac{gv_o}{|\vec{v}(t)|}$$

Módulo de la Aceleración tangencial:

$$a_T = \frac{|\vec{a}(t).\vec{v}(t)|}{|\vec{v}(t)|} = \frac{g\sqrt{|\vec{v}(t)|^2 - v_o^2}}{|\vec{v}(t)|}$$

Radio de curvatura:

$$\rho = \frac{|\vec{v}(t)|^2}{a_N} = \frac{|\vec{v}(t)|^3}{gv_o}$$

15. Un punto se mueve de manera decelerada por una circunferencia de radio R, de modo que sus aceleraciones tangencial y normal tienen igual módulo en todo instante de tiempo. Si en el instante inicial se le comunicó al punto una velocidad de módulo $v_o$ encontrar los módulos de la velocidad y de la aceleración total en función del recorrido s sobre la trayectoria.

. ---

Se trata de encontrar la velocidad en función de la trayectoria y la aceleración total en función también de la trayectoria. Es decir, calcularemos primero v(s) y con este valor hallaremos $a_N(s)$, de donde obtendremos el módulo de la aceleración total en función de s:

$$a(s) = |\vec{a}(s)| = \sqrt{a_T^2(s) + a_N^2(s)} = \sqrt{2.a_N^2(s)} = \sqrt{2\frac{v^4(s)}{R^2}} = \sqrt{2}\,\frac{v^2(s)}{R}$$

Podemos calcular v(s) de dos maneras distintas:

a) De forma directa:

$$|a_T(t)| = |a_N(t)| \Rightarrow a_T(t) = -a_N(t)$$ (por ser decelerado tiene el signo menos)

y siendo $a_T(t) = \frac{d|v(t)|}{dt} = \frac{dv(t)}{dt}$, $a_N(t) = \frac{|v(t)|^2}{R} = \frac{v^2(t)}{R}$ se tiene: $\frac{v^2(t)}{R} = -\frac{dv(t)}{dt}$

Pasamos ahora al parámetro s de la trayectoria:

$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{dv(s(t))}{ds}.\frac{ds}{dt} = v(t).\frac{dv(s)}{ds}$$

Por tanto:

$$v(t).\frac{dv(s)}{ds} = -\frac{v^2(s)}{R} \Rightarrow \frac{dv(s)}{ds} = -\frac{v(s)}{R} \Rightarrow \frac{dv(s)}{v(s)} = -\frac{ds}{R}$$

integrando:

$$\int_{v_o}^{v(s)} \frac{dv(s)}{v(s)} = -\int_o^s \frac{ds}{R} \Rightarrow Lv(s)\Big|_{v_o}^{v(s)} = -\frac{s}{R} \Rightarrow \frac{v(s)}{v_o} = e^{-\frac{s}{R}} \Rightarrow v(s) = v_o.e^{-\frac{s}{R}}$$

Por tanto, con este valor de la velocidad determinamos la aceleración pedida:

$$\begin{cases} v(s) = e^{-\frac{s}{R}} \\ a(s) = \sqrt{2}.\frac{v_o^2}{R}.e^{-\frac{2s}{R}} \end{cases}$$

b) Calculando primero v(t) y luego s(t):

De ser: $$\frac{dv(t)}{dt} = -\frac{v^2(t)}{R} \Rightarrow \frac{dv(t)}{v^2(t)} = -\frac{dt}{R} \Rightarrow \int_{v_o}^{v(t)} \frac{dv(t)}{v^2(t)} = -\int_{t_o}^{t} \frac{dt}{R}$$

Se tiene:

$$-\left.\frac{1}{v(t)}\right|_{v_o}^{v(t)}=-\frac{t-t_o}{R}\Rightarrow\frac{1}{v_o}-\frac{1}{v(t)}=-\frac{t-t_o}{R}\Rightarrow\frac{1}{v(t)}=\frac{1}{v_o}+\frac{t-t_o}{R}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow v(t)=\frac{1}{\frac{1}{v_o}+\frac{t-t_o}{R}}=\frac{1}{\frac{R+v_o(t-t_o)}{Rv_o}}=\frac{Rv_o}{R+v_o(t-t_o)}=\frac{v_o}{1+\frac{v_o}{R}(t-t_o)}$$

O sea:

$$v(t)=\frac{v_o}{1+\frac{v_o}{R}(t-t_o)} \qquad [*]$$

ahora calculamos *s(t)* haciendo $\frac{ds}{dt}=v(t)$:

$$ds(t)=v(t).dt\Rightarrow\int_{s_o}^{s(t)}ds(t)=\int_{t_o}^{t}\frac{v_o}{1+\frac{v_o}{R}(t'-t_o)}.dt'=R\int_{t_o}^{t}\frac{\cancel{v_o}/R}{1+\frac{v_o}{R}(t'-t_o)}.dt'=$$

$$=R.L\left[1+\frac{v_o}{R}(t-t_o)\right]\Rightarrow s(t)=R.L\left[1+\frac{v_o}{R}(t-t_o)\right]$$

Despejando el tiempo:

$$1+\frac{v_o}{R}(t-t_o)=e^{\frac{s(t)}{R}}\Rightarrow t-t_o=\frac{R}{v_o}\left[e^{\frac{s(t)}{R}}-1\right]\Rightarrow t=t_o+\frac{R}{v_o}\left[e^{\frac{s(t)}{R}}-1\right]$$

ya podemos, finalmente, calcular *v(s)*, pues al sustituir en [*]:

$$v(s)=v(t(s))=\frac{v_o}{1+\frac{v_o}{R}(t-t_o)}=\frac{v_o}{1+\frac{v_o}{R}\frac{R}{v_o}(e^{\frac{s(t)}{R}}-1)}=\frac{v_o}{1+e^{\frac{s(t)}{R}}-1}=\frac{v_o}{e^{\frac{s(t)}{R}}}=v_o.e^{-\frac{s(t)}{R}}$$

y, en definitiva, también es:

$$\begin{cases} v(s)=e^{-\frac{s}{R}} \\ a(s)=\sqrt{2}.\frac{v_o^2}{R}.e^{-\frac{2s}{R}} \end{cases}$$

16. Un punto se mueve en una trayectoria plana, de forma que su aceleración tangencial $\vec{a}_T(t) = c.\vec{u}_T(t)$, y su aceleración normal $\vec{a}_N(t) = b.t^4.\vec{u}_N(t)$, donde b y c son constantes positivas y t es el tiempo. Si el punto parte del reposo en t=0, encontrar el radio de curvatura y la aceleración total en función del recorrido s sobre la curva.

. -----

$$a_T(t) = \frac{dv(t)}{dt} \Rightarrow dv(t) = a_T(t).dt \Rightarrow v(t)\Big|_{v_o}^{v(t)} = \int_o^t a_T(t).dt = c.t \Rightarrow v(t) - v_o = ct$$

como parte del reposo para t=0, será $v_o$=0, luego $v(t) = c.t$

$$\frac{ds}{dt} = v(t) \Rightarrow ds = v(t).dt \Rightarrow s\Big|_o^{s(t)} = \int_o^t ct.dt = \frac{1}{2}c.t^2 \Rightarrow s(t) = \frac{1}{2}c.t^2 \Rightarrow t = +\sqrt{\frac{2s}{c}}$$

Velocidad en función de s:

$$v(s) = v(t(s)) = c.\sqrt{\frac{2s}{c}} = \sqrt{2cs}$$

Aceleración normal y tangencial en función de s:

$$a_N(s) = b.t(s)^4 = b\left(\sqrt{\frac{2s}{c}}\right)^4 = b\left(\frac{2s}{c}\right)^2 = \frac{4b}{c^2}s^2, \qquad a_T(s) = c$$

Radio de curvatura:

$$\rho(s) = \frac{v(s)^2}{a_N(s)} = \frac{2cs}{\frac{4bs^2}{c^2}} = \frac{c^3}{2bs}$$

Aceleración total:

$$\vec{a}(t) = c.\tilde{\vec{u}}_T + \frac{4bs^2}{c^2}\tilde{\vec{u}}_N$$

17. Un móvil inicia una trayectoria circular de radio 5m, siendo su aceleración angular constante $|\vec{a}| = 6s^{-2}$. Calcular las magnitudes de las aceleraciones tangencial, normal y total cuando ha transcurrido un segundo.

. ----

A partir de la aceleración angular hallamos la velocidad angular:

$$\alpha = \frac{d\varpi}{dt} \Rightarrow d\varpi = \alpha.dt \Rightarrow \varpi = \int_0^t \alpha.dt = \alpha.t$$

Aceleración tangencial: $a_T = \alpha.R$

Aceleración normal: $a_N = -\varpi^2.R$

Aceleración total: $a = \sqrt{a_T{}^2 + a_T{}^2} = \sqrt{(\alpha R)^2 + (-\alpha^2 t^2.R)^2} = \alpha.R\sqrt{1 + (\alpha^2.t^4)}$

Valor cuando ha transcurrido un segundo:

$$a_T = 6.5\ m/s^2 = 30\ m.s^{-2}$$

$$a_N = -(6.1)^2.5 = -180\ m.s^{-2}$$

$$a = \sqrt{30^2 + (-180)^2} = \sqrt{900 + 32400} = \sqrt{33300} = 182{,}48\ m.s^{-2}$$

Expresiones vectoriales:

$$\vec{a} = 30.\vec{u}_T - 180.\vec{u}_N \qquad \vec{a}_T = 30.\vec{u}_T \qquad \vec{a}_N = -180.\vec{u}_N$$

18. Una partícula se mueve a lo largo de una curva plana cuya ecuación en coordenadas polares es $r(\theta) = r_o.e^{\theta}$, donde $\theta(t) = w.t$ con w una constante positiva. Encontrar $\vec{v}(t), \vec{a}_T(t), \vec{a}_N(t)\ \ y\ \rho(t)$ en coordenadas polares.

. -----

Velocidad:

$$\vec{v}(t) = \dot{r}(\theta).\vec{e}_r + r(\theta).\dot{\theta}(t).\vec{e}_\theta = \frac{d}{dt}\left(r_o.e^{\theta}\right)\vec{e}_r + r(\theta).\dot{\theta}(t).\vec{e}_\theta = r(\theta).\dot{\theta}(t).\vec{e}_r + r(\theta).\dot{\theta}(t).\vec{e}_\theta =$$

$$= r(\theta).\dot{\theta}(t).(\vec{e}_r + \vec{e}_\theta) = r(\theta).\varpi.(\vec{e}_r + \vec{e}_\theta)$$

Tomamos el módulo de la velocidad a fin de determinar la aceleración tangencial:

$$|\vec{v}(t)| = r(\theta).w.\sqrt{2}$$

Módulo de la aceleración tangencial: $a_T(t) = \frac{d}{dt}|\vec{v}(t)| = r(\theta).\varpi^2\sqrt{2}$

Vector unitario tangencial: $\vec{u}_T(t) = \frac{\vec{v}(t)}{|\vec{v}(t)|} = \frac{r(\theta).\varpi}{\sqrt{2}.r(\theta).\varpi}(\vec{e}_r + \vec{e}_\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_r + \vec{e}_\theta)$

Vector aceleración tangencial:

$$\vec{a}_T(t) = a_T(t)\vec{u}_T(t) = r(\theta).\varpi^2\sqrt{2}.\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_r + \vec{e}_\theta) = r(\theta).\varpi^2(\vec{e}_r + \vec{e}_\theta)$$

Aceleración:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(r(\theta).\varpi.(\vec{e}_r + \vec{e}_\theta)\right) = \frac{d}{dt}(r(\theta).\varpi).\vec{e}_r + (r(\theta).\varpi).\frac{d}{dt}\vec{e}_r +$$

$$+ \frac{d}{dt}(r(\theta).\varpi).\vec{e}_\theta + (r(\theta).\varpi).\frac{d}{dt}\vec{e}_\theta = r(\theta).\varpi^2.\vec{e}_r + r(\theta).\varpi^2.\vec{e}_\theta + r(\theta).\varpi^2.\vec{e}_\theta - r(\theta).\varpi^2.\vec{e}_r =$$

$$= 2.r(\theta)\varpi^2.\vec{e}_\theta$$

Vector aceleración normal:

$$\vec{a}_N(t) = \vec{a}(t) - \vec{a}_T(t) = 2.r(\theta).\varpi^2.\vec{e}_\theta - r(\theta).\varpi^2(\vec{e}_r + \vec{e}_\theta) = -r(\theta).\varpi^2\vec{e}_r + r(\theta).\varpi^2\vec{e}_\theta$$

Módulo de la aceleración normal:

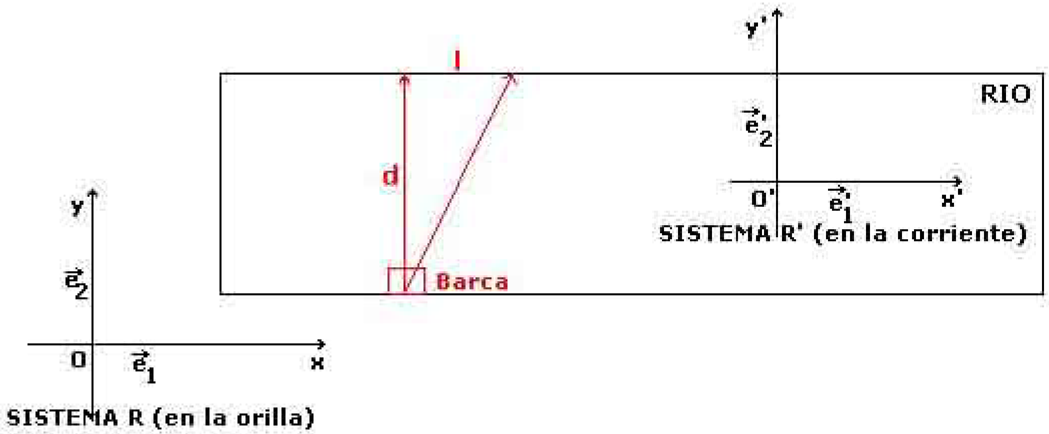
$$a_N(t) = \sqrt{2}.r(\theta).\varpi^2$$

Radio de curvatura:

$$\rho(t) = \frac{v(t)^2}{a_N(t)} = \frac{(r(\theta).w^2\sqrt{2})^2}{r(\theta).w^2\sqrt{2}} = r(\theta).w^2\sqrt{2}$$

19. Considérese un río que fluye en la dirección del eje X respecto a un observador en la orilla, y una barca que cruza el río con velocidad constante $\vec{u}$ en la dirección del eje Y, medida por un observador que se mueve con la corriente. La anchura del río es d y en el viaje entre las dos orillas la barca es arrastrada una distancia l en la dirección de la corriente según el observador de la orilla. Hallar (a) la velocidad de la corriente y (b) el tiempo que tarda la barra en cruzar el río.

. ----




Fórmula de la velocidad relativa: $\vec{v}(t) = \vec{v}_{o'}(t) + \vec{v}'(t) + \vec{\varpi}(t) \wedge \vec{r}(t)$

En este caso, puesto que R' no tiene rotación respecto de R, será $\vec{\varpi}(t) = \vec{0}$, quedando

$$\vec{v}_B(t) = \vec{v}_{o'}(t) + \vec{v}'_B(t)$$

Datos:

$$\vec{v}_{o'}(t) = v_{o'}.\vec{e}_1, \quad \vec{v}'_B(t) = u.\vec{e}'_2, \quad \vec{v}_B(t) = \frac{l}{\Delta t}.\vec{e}_1 + \frac{d}{\Delta t}.\vec{e}_2$$

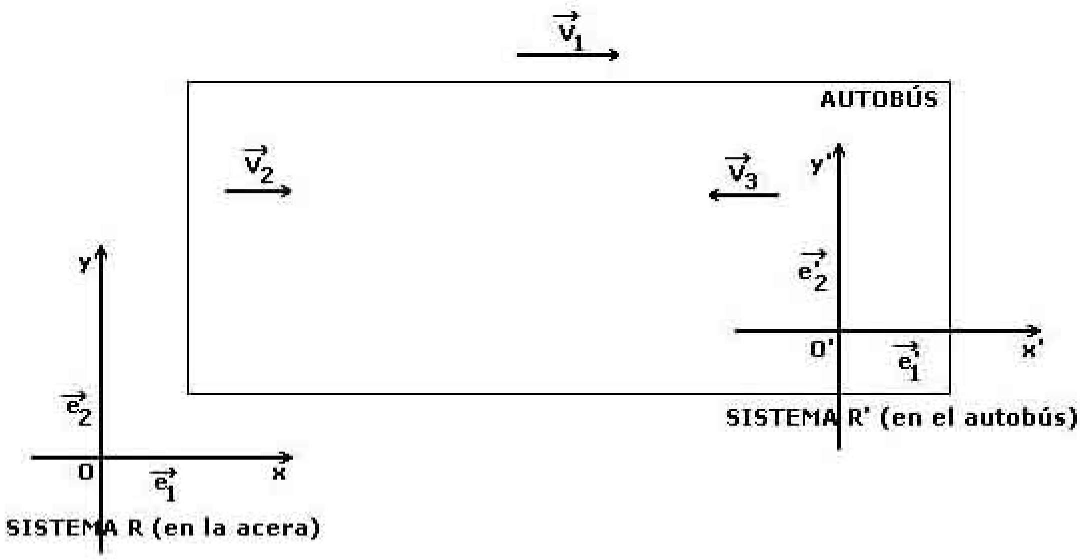
Aplicando la fórmula de la velocidad relativa e identificando:

$$\vec{v}_B(t) = v'_o.\vec{e}_1 + u.\vec{e}_2 = \frac{l}{\Delta t}.\vec{e}_1 + \frac{d}{\Delta t}.\vec{e}_2 \Rightarrow \begin{cases} v'_o = \dfrac{l}{\Delta t} \\ u = \dfrac{d}{\Delta t} \end{cases}$$

$$\boxed{\Delta t = \frac{d}{u} \qquad v'_o = \frac{l.u}{d}}$$

20. Un autobús que parte del reposo puede adquirir una velocidad constante $\vec{v}_1$ en un intervalo de tiempo $\Delta$t. Un pasajero sube al autobús por su parte posterior y avanza hacia la parte delantera del mismo con una velocidad constante $\vec{v}_2$ con respecto al autobús. Otro pasajero desea bajar y avanza desde la parte delantera hasta la parte posterior con una velocidad $\vec{v}_3$, también respecto al autobús. Hallar durante la arrancada (que se considera un movimiento uniformemente acelerado), y cuando él marcha a velocidad constante (a) la velocidad y aceleración del pasajero que sube con respecto a un observador parado en la acera, (b) la velocidad y aceleración del pasajero que quiere bajarse respecto al mismo observador y (c) la velocidad y aceleración del pasajero que sube respecto del que quiere bajarse.

. ---




Formulas de la velocidad y de la aceleración relativas:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_{o'}(t) + \vec{v}'(t) + \vec{\varpi}(t) \wedge \vec{r}(t)$$
$$\vec{a}(t) = \vec{a}_o(t) + \vec{v}'(t) + 2\vec{\varpi} \wedge \vec{v}'(t) + \vec{\alpha} \wedge \vec{r}'(t) + \vec{\varpi} \wedge \left(\vec{\varpi} \wedge \vec{r}'(t)\right)$$

Por ser un movimiento sin rotación de un sistema respecto del otro (traslación pura→ $\vec{\varpi} = \vec{0}$):

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_{o'}(t) + \vec{v}'(t)$$
$$\vec{a}(t) = \vec{a}_o(t) + \vec{a}'(t)$$

Velocidad y aceleración del autobús:

$$\vec{a}_{o'}(t) = \begin{cases} \dfrac{\vec{v}_1}{\Delta t}, & t \in [0, \Delta t] \\ 0, & t \in (\Delta t, \infty) \end{cases} \qquad \vec{v}_{o'}(t) = \begin{cases} \vec{a}_{o'}(t).t, & t \in [0, \Delta t] \\ \vec{v}_1, & t \in (\Delta t, \infty) \end{cases}$$

Pasajero que sube:

$$\begin{array}{l}\vec{v}_s(t) = \vec{v}_{o'}(t) + \vec{v}_s^{\,'}(t) \\ \vec{a}_s(t) = \vec{a}_o(t) + \vec{a}_s^{\,'}(t)\end{array}$$
, y sabiendo que es $\vec{v}_s^{\,'}(t) = \vec{v}_2 = v_2.\vec{e}_1$, se tiene:

$$\vec{v}_s(t) = \begin{cases} \dfrac{\vec{v}_1 t}{\Delta t} + \vec{v}_2 = \left(\dfrac{v_1 t}{\Delta t} + v_2\right).\vec{e}_1 & t \in [0, \Delta t] \\ \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (v_1 + v_2).\vec{e}_1 & t \in (\Delta t, \infty) \end{cases}$$

$$\vec{a}_s(t) = \begin{cases} \vec{a}_{o'}(t) = \dfrac{\vec{v}_1}{\Delta t} = \dfrac{v_1}{\Delta t}.\vec{e}_1 & t \in [0, \Delta t] \\ 0 & t \in (\Delta t, \infty) \end{cases}$$

Pasajero que baja:

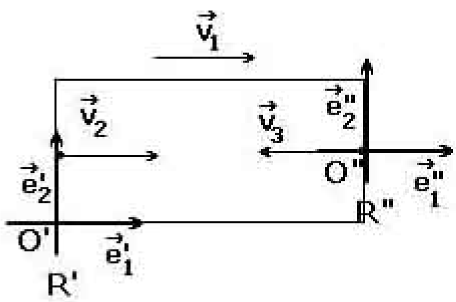
$$\begin{array}{l}\vec{v}_B(t) = \vec{v}_{o'}(t) + \vec{v}_B^{\,'}(t) \\ \vec{a}_B(t) = \vec{a}_o(t) + \vec{a}_B^{\,'}(t)\end{array}$$
, y sabiendo que es $\vec{v}_B^{\,'}(t) = \vec{v}_3 = -v_3.\vec{e}_1$, se tiene:

$$\vec{v}_B(t) = \begin{cases} \dfrac{\vec{v}_1 t}{\Delta t} + \vec{v}_3 = \left(\dfrac{v_1 t}{\Delta t} - v_3\right).\vec{e}_1 & t \in [0, \Delta t] \\ \vec{v}_1 + \vec{v}_3 = (v_1 - v_3).\vec{e}_1 & t \in (\Delta t, \infty) \end{cases}$$

$$\vec{a}_s(t) = \begin{cases} \vec{a}_{o'}(t) = \dfrac{\vec{v}_1}{\Delta t} = \dfrac{v_1}{\Delta t}.\vec{e}_1 & t \in [0, \Delta t] \\ 0 & t \in (\Delta t, \infty) \end{cases}$$

Pasajero que sube respecto al pasajero que baja:

Colocamos en este caso un sistema de referencia *R"* en el pasajero que baja. El sistema R' sigue fijo al autobús:




Se tienen las ecuaciones siguientes:

$$\begin{array}{l}\vec{v}_{SB}(t) = \vec{v}_{o''}(t) + \vec{v}_{SB}^{\,''}(t) \\ \vec{a}_{SB}(t) = \vec{a}_{o''}(t) + \vec{a}_{SB}^{\,''}(t)\end{array},$$

y sabiendo que es $\vec{v}_{SB}(t) = \vec{v}_2 = v_2.\vec{e}'_1$, y también $\vec{v}_{O''}(t) = \vec{v}_3 = -v_3.\vec{e}'_1$

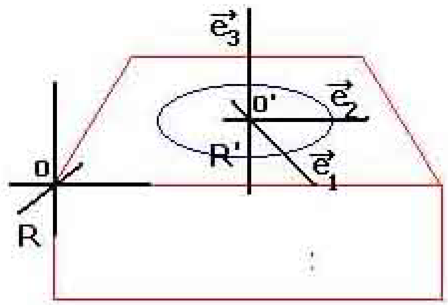
será:

$$\vec{v}_{SB}^{''}(t) = \vec{v}_{SB}(t) - \vec{v}_{o''}(t) = \vec{v}_2 - \vec{v}_3 = (v_2 + v_3).\vec{e}'_1$$

y las aceleraciones son todas nulas: $\vec{a}_{SB}(t) = \vec{a}_{o''}(t) = \vec{a}_{SB}^{''}(t) = \vec{0}$

21. Sobre el plato de un tocadiscos que gira con velocidad angular constante e igual a $\vec{\omega}$, se encuentra una partícula situada a una distancia $r_1$ del eje de giro. Calcular la velocidad y la aceleración en un sistema de referencia ligado al cuerpo del tocadiscos (a) cuando la partícula está en reposo respecto al plato, (b) cuando se mueve radialmente hacia fuera con velocidad $\vec{u}$ (respecto al plato) y (c) cuando se mueve circularmente sobre el plato en torno al eje de giro con una velocidad angular $\vec{\varpi}'$ (respecto al plato).

.... ---




- El sistema R está fijo al tocadiscos, y el sistema R' está filo al plato.

Fórmulas:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_{o'}(t) + \vec{v}'(t) + \vec{\varpi}(t) \wedge \vec{r}(t)$$
$$\vec{a}(t) = \vec{a}_o(t) + \vec{a}'(t) + 2\vec{\varpi} \wedge \vec{v}'(t) + \vec{\alpha} \wedge \vec{r}'(t) + \vec{\varpi} \wedge \left(\vec{\varpi} \wedge \vec{r}'(t)\right)$$

a) Partícula en reposo respecto al plato:

$$\vec{r}'(t) = r_1\vec{e}_1 \qquad \vec{v}_{o'}(t) = \vec{0} \qquad \vec{v}'(t) = \vec{0} \qquad \vec{\alpha} = \vec{0} \qquad \vec{\varpi} = \varpi.\vec{e}_3, \quad \vec{a}_{o'}(t) = \vec{0}, \quad \vec{a}'(t) = \vec{0}$$

Con lo cual queda

$$\vec{v}(t) = \vec{\varpi} \wedge \vec{r}'(t) = \varpi.\vec{e}_3 \wedge r_1.\vec{e}_1 = \varpi.r_1.\vec{e}_2$$
$$\vec{a}(t) = \vec{\varpi} \wedge (\vec{\varpi} \wedge \vec{r}'(t)) = \varpi.\vec{e}_3 \wedge (\varpi.\vec{e}_3 \wedge r_o.\vec{e}_1) = \varpi.\vec{e}_3 \wedge \varpi.r_1.\vec{e}_2 = -\varpi^2.r_1.\vec{e}_1$$

b) Partícula en movimiento radial hacia fuera del plato:

$$\vec{r}'(t) = r_1\vec{e}_1 \qquad \vec{v}_{o'}(t) = \vec{0} \qquad \vec{v}'(t) = u.\vec{e}_1 \qquad \vec{\alpha} = \vec{0} \qquad \vec{\varpi} = \varpi.\vec{e}_3, \quad \vec{a}_{o'}(t) = \vec{0}, \quad \vec{a}'(t) = \vec{0}$$

entonces:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}'(t) + \vec{\varpi} \wedge \vec{r}'(t) = u.\vec{e}_1 + \left(\varpi.\vec{e}_3 \wedge r_1.\vec{e}_1\right) = u.\vec{e}_1 + \varpi.r_1.\vec{e}_2$$

$$\vec{a}(t) = 2\vec{\varpi} \wedge \vec{v}'(t) + \vec{\varpi} \wedge (\vec{\varpi} \wedge \vec{r}'(t)) = 2\varpi.\vec{e}_3 \wedge u.\vec{e}_1 + \varpi.\vec{e}_3 \wedge (\varpi.\vec{e}_3 \wedge r_1\vec{e}_1) =$$
$$= 2\varpi.u.\vec{e}_2 - \varpi^2.r_1.\vec{e}_1$$

c) Partícula moviéndose con velocidad angular $\vec{\varpi}'$ respecto del eje del plato:

$$\vec{r}'(t) = r_1\vec{e}_1 \qquad \vec{v}_{o'}(t) = \vec{0} \qquad \vec{v}'(t) = .\vec{\varpi}'\wedge\vec{r}'(t) = \varpi'.\vec{e}_3 \wedge r_1.\vec{e}_1 = \varpi'.r_1.\vec{e}_2$$

$$\vec{\alpha} = \vec{0} \qquad \vec{\varpi} = \varpi.\vec{e}_3, \quad \vec{a}_{o'}(t) = \vec{0}, \quad \vec{a}'(t) = \vec{\varpi}'\wedge\left(\vec{\varpi}'\wedge\vec{r}'(t)\right) = -\varpi'^2.r_1.\vec{e}_1$$

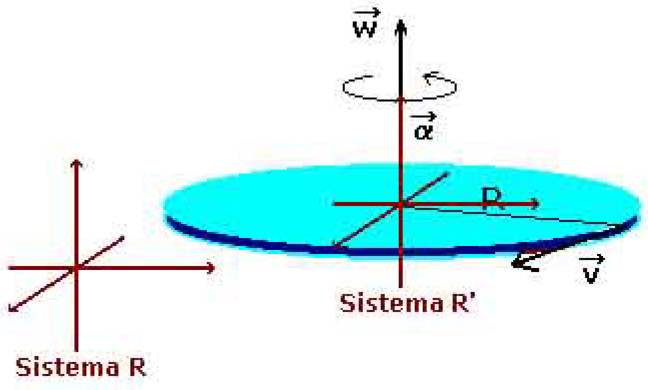
y se obtiene:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}'(t) + \vec{\varpi} \wedge \vec{r}'(t) = \varpi'.r_1.\vec{e}_2 + \varpi.r_1.\vec{e}_2 = r_1(\varpi + \varpi).\vec{e}_2$$

$$\vec{a}(t) = \vec{a}'(t) + 2\vec{\varpi} \wedge \vec{v}'(t) + \vec{\varpi} \wedge (\vec{\varpi} \wedge \vec{r}'(t)) = -\varpi'^2.r_1.\vec{e}_1 + 2.\varpi.\vec{e}_3 \wedge \varpi'.r_1.\vec{e}_2 +$$
$$+ \varpi.\vec{e}_3 \wedge (\varpi.\vec{e}_3 \wedge r_1.\vec{e}_1) = -\varpi'^2.r_1.\vec{e}_1 - 2\varpi.\varpi'.r_1.\vec{e}_1 - \varpi^2.r_1.\vec{e}_1 = -r_1.(\varpi + \varpi')^2.\vec{e}_1$$

22. Una partícula se mueve a lo largo del borde de un disco circular de radio R con velocidad constante $\vec{v}$ respecto al mismo. Este disco está girando alrededor de un eje perpendicular a él que pasa por su centro, respecto a cierto observador $\Gamma$. Si en un instante de tiempo dado la velocidad angular del disco es $\vec{\varpi}_1$ y la aceleración angular es $\vec{\alpha}_1$ oponiéndose ambas al movimiento de la partícula sobre el disco, (a) hallar en ese instante la velocidad y la aceleración de la partícula respecto del observador $\Gamma$ y (b) si en dicho instante de tiempo la partícula se desprende del disco, ¿en qué dirección saldría?.

. ----




Sistema R': fijo al disco. Sistema R: exterior al disco (observador T).

$$\vec{r}'(t) = R.\vec{e}_\rho = R.\cos\theta.\vec{e}_1 + R.sen\theta.\vec{e}_2$$
$$\vec{\varpi}_1 = \varpi_1.\vec{e}_3$$
$$\vec{\alpha} = \alpha.\vec{e}_3$$

Velocidad y aceleración de la partícula en el sistema R':

$$\vec{v}'(t) = -v.\vec{e}_\theta = -v.(-sen\theta.\vec{e}_1 + \cos\theta.\vec{e}_2) = v.sen\theta.\vec{e}_1 + v.\cos\theta.\vec{e}_2$$
$$\vec{a}'(t) = -R.\varpi^2.\vec{e}_\rho = -\frac{v^2}{R}.\vec{e}_\rho = -\frac{v^2}{R}\cos\theta.\vec{e}_1 - \frac{v^2}{R}.sen\theta.\vec{e}_2$$

Velocidad y aceleración de la partícula en el sistema R:

$$\vec{\varpi}_1 \wedge \vec{r}'(t) = \varpi_1.\vec{e}_3 \wedge (R.\cos\theta.\vec{e}_1 + R.sen\theta.\vec{e}_2) = \varpi_1 R.\cos\theta.\vec{e}_2 - \varpi_1 R.sen\theta.\vec{e}_1$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}'(t) + \vec{\varpi}_1.\vec{r}'(t) = -(v - \varpi_1.R).(-sen\theta.\vec{e}_1 + \cos\theta.\vec{e}_2)$$

$$\boxed{\vec{v}(t) = (\varpi_1.R - v).\vec{e}_\theta}$$

$$2\vec{\varpi}_1 \wedge \vec{v}'(t) = 2\varpi_1.v.sen\theta.\vec{e}_2 + 2\varpi_1 v.\cos\theta.\vec{e}_1$$

$$\vec{\alpha} \wedge \vec{r}'(t) = \alpha.R.\cos\theta.\vec{e}_2 - \alpha.R.sen\theta.\vec{e}_1$$

$$\vec{\varpi}_1 \wedge (\vec{\varpi}_1 \wedge \vec{r}'(t)) = -\varpi_1^2.R.\cos\theta.\vec{e}_1 - \varpi_1^2.R.sen\theta.\vec{e}_2$$

$$\vec{a}(t) = \vec{a}_o(t) + \vec{a}'(t) + 2\vec{\varpi} \wedge \vec{v}'(t) + \vec{\alpha} \wedge \vec{r}'(t) + \vec{\varpi} \wedge \left(\vec{\varpi} \wedge \vec{r}'(t)\right) =$$

$$= 0 - \frac{v^2}{R}\cos\theta.\vec{e}_1 - \frac{v^2}{R}.sen\theta.\vec{e}_2 + 2\varpi_1.v.sen\theta.\vec{e}_2 + 2\varpi_1 v.\cos\theta.\vec{e}_1 +$$

$$+ \alpha.R.\cos\theta.\vec{e}_2 - \alpha.R.sen\theta.\vec{e}_1 - \varpi_1^2.R.\cos\theta.\vec{e}_1 - \varpi_1^2.R.sen\theta.\vec{e}_2$$

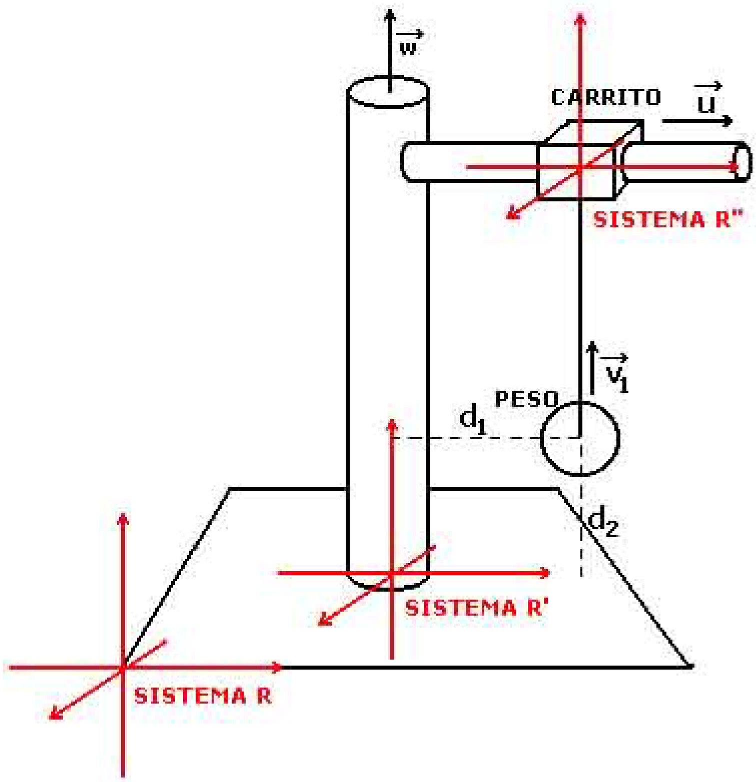
o sea:

$$\vec{a}(t) = \left(-\frac{v^2}{R} + 2\varpi_1 v - \varpi_1^2.R.\right)(\cos\theta.\vec{e}_1 + sen\theta.\vec{e}_2) + \alpha.R.(-sen\theta.\vec{e}_1 + \cos\theta.\vec{e}_2) =$$

$$= \left(-\frac{v^2}{R} + 2\varpi_1 v - \varpi_1^2.R.\right).\vec{e}_\rho + \alpha.R.\vec{e}_\theta$$

23. Una grúa de construcción gira sobre su eje con velocidad angular constante $\vec{\varpi}$. Por su brazo se desplaza alejándose del eje con una velocidad constante $\vec{u}$ un carro del que pende un peso que está elevándose con velocidad $\vec{v}_1$ (constante) respecto de él. En un instante de tiempo determinado el peso se encuentra a una distancia $d_1$ del eje de la grúa y a una distancia $d_2$ sobre el suelo. Calcular el radio de curvatura de la trayectoria del peso que, en ese instante, mide un observador quieto en el suelo.

. ---




Colocamos un sistema de referencia R" fijo al carrito, otro sistema de referencia R' fijo a la grúa, y, finalmente, un sistema de referencia R fijo al suelo.

- Respecto al sistema R" fijo al carrito:

El movimiento del peso respecto a este sistema es $\begin{cases} \vec{v}''(t) = v_1.\vec{e}_2 \\ \vec{a}''(t) = \vec{0} \end{cases}$

- Respecto al sistema R' fijo a la grúa (R" se mueve con respecto a R' con traslación pura $\vec{\varpi}' = \vec{0}$, $\vec{\alpha} = \vec{0}$):

R" se mueve con el carrito del cual cuelga el peso: $\vec{v}'_{o''}(t) = \vec{u} = u.\vec{e}_1$, $\vec{a}'_{o''}(t) = \vec{0}$

$$\vec{v}'(t) = \vec{v}'_{o''}(t) + \vec{v}''(t) = u.\vec{e}_1 + v_1.\vec{e}_2$$
$$\vec{a}'(t) = \vec{a}'_{o''} + \vec{a}''(t) = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$$

- Respecto al sistema R fijo al suelo (R' se mueve con respecto a R con rotación pura $\vec{v}_{o'}(t) = \vec{0}$, $\vec{a}_{o'}(t) = \vec{0}$): $\vec{\varpi} = \varpi.\vec{e}_2$, $\vec{r}'(t) = d_1.\vec{e}_1 + d_2.\vec{e}_2$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_{o'}(t) + \vec{v}'(t) + \vec{\varpi} \wedge \vec{r}'(t) = \vec{0} + u.\vec{e}_1 + v_1.\vec{e}_2 + \varpi.\vec{e}_2 \wedge \left(d_1.\vec{e}_1 + d_2.\vec{e}_2\right) =$$
$$= u.\vec{e}_1 + v_1.\vec{e}_2 - \varpi.d_1.\vec{e}_3$$

$$\vec{a}(t) = \vec{a}_o(t) + \vec{v}'(t) + 2\vec{\varpi} \wedge \vec{v}'(t) + \vec{\alpha} \wedge \vec{r}'(t) + \vec{\varpi} \wedge \left(\vec{\varpi} \wedge \vec{r}'(t)\right) =$$
$$= \vec{0} + 2\varpi.\vec{e}_2 \wedge (u.\vec{e}_1 + v_1.\vec{e}_2) + \vec{0} + \varpi.\vec{e}_2 \wedge (\varpi.\vec{e}_2 \wedge (d_1.\vec{e}_1 + d_2.\vec{e}_2)) =$$
$$= -2\varpi.u.\vec{e}_3 + \varpi.\vec{e}_2 \wedge (-\varpi.d_1.\vec{e}_3) = -\varpi^2.d_1.\vec{e}_1 - 2\varpi.u.\vec{e}_3$$

- Radio de curvatura:

Para calcularlo utilizaremos el módulo de la velocidad y el módulo de la aceleración normal:

$$\rho(t) = \frac{|\vec{v}(t)|^2}{|\vec{a}(t)|}$$

Cálculo de el modulo de la velocidad:

$$|\vec{v}(t)| = \sqrt{u^2 + v_1^2 + \varpi^2 d_1^2}$$

Cálculo de la aceleración normal:

a) vector unitario tangencial: $\vec{u}_T(t) = \dfrac{\vec{v}(t)}{|\vec{v}(t)|}$

b) Aceleración tangencial:

$$\vec{a}_T(t) = (\vec{a}(t).\vec{u}_T(t)).\vec{u}_T(t) = (\vec{a}(t).\vec{v}(t)).\frac{\vec{v}(t)}{|\vec{v}(t)|^2} = \frac{2\varpi^2 u.d_1 - \varpi^2.u.d_1}{u^2 + v_1^2 + \varpi^2.d_1^2}.\vec{v}(t) =$$
$$= \frac{\varpi^2.u.d_1}{u^2 + v_1^2 + \varpi^2.d_1^2}.\vec{v}(t)$$

d) Aceleración normal:

$$\vec{a}_N(t) = \vec{a}(t) - \vec{a}_T(t) = -d_1.\varpi^2.\vec{e}_1 - 2.\varpi.u.\vec{e}_3 - \frac{\varpi^2.u.d_1}{u^2 + v_1^2 + \varpi^2 d_1^2}.(u.\vec{e}_1 + v_1.\vec{e}_2 - \varpi.d_1.\vec{e}_3)$$

## 6. Bibliografía:

**ALONSO, S.M.; FINN, E.J.** FISICA, Editorial Addison-Wesley Iberoamericana. 1987

**SEARS-ZEMANSKY-YOUNG**, FISICA UNIVERSITARIA, Editorial Fondo Educativo Interamericano.

**BURBANO DE ERCILLA, S.; OTROS**, FISICA GENERAL, Editorial Mira Editores. 1993

**TIPPLER, P.A**., FISICA, Editorial Reverté.

**GARTENHAUS, S.**, FISICA, Ed. Interamericana.