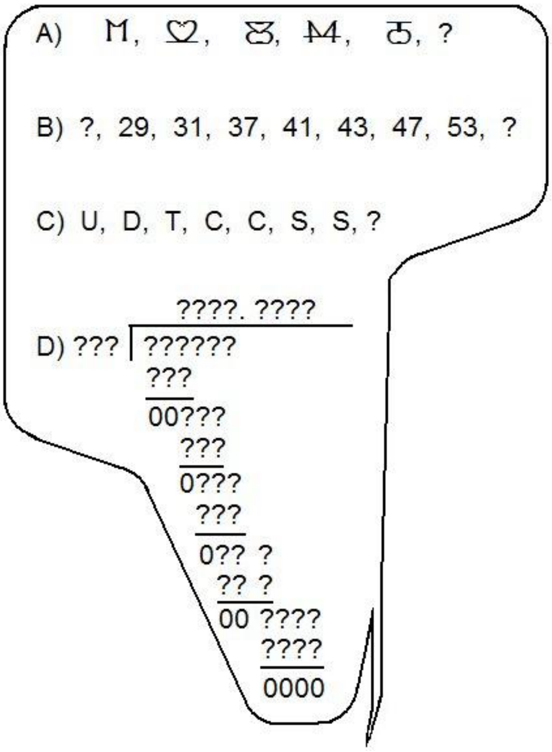
¿QUÉ ES UN ACERTIJO?

POR: ELÍAS LOYOLA CAMPOS

A mi hija Mariana.
Encantadora alumna de la XXI generación del CCH que gusta de los acertijos.



Existen muchos sinónimos de la palabra acertijo: enigma rompecabezas, pasatiempo adivinanza, charada, etc. Incluso es frecuente el anglicismo de “Puzzle”. Un acertijo, siempre puede formularse explícitamente en forma de pregunta. Precisamente esto es lo que parece resultar atractivo para la mayoría de las personas... una pregunta que provoca curiosidad y el desasosiego causado sólo se calma hasta que conocemos la respuesta (aunque muchas veces, esas respuestas hacen que surjan nuevas preguntas).

Cuando dichos acertijos se refieren a algunos aspectos que involucran directa o indirectamente a las matemáticas se llaman acertijos matemáticos. Aunque en ocasiones no es muy clara la separación que existe entre problema y acertijo, lo que caracteriza a éstos últimos (y los hace más agradables e interesantes) es que son planteados en un lenguaje muy cotidiano y de manera simple. Desde luego, ello no implica que la solución sea necesariamente simple; sin embargo, cuando también la solución es muy sencilla, pero requiere de una dosis de creatividad, el acertijo se convierte en un acertijo encantador.

Cuántas veces, algunos de nosotros, no hemos batallado mucho para encontrar la solución de un acertijo, y vemos ésta al darnos por rendidos, para exclamar asombrados ¡...pero si estaba muy fácil!

¿Cómo es que no pude hacerlo? Responder a esta pregunta no es sencillo ya que, dependiendo del tipo de acertijo, están involucradas algunas habilidades que quizá no hayamos desarrollado suficientemente. A manera de comentario, les diré que una de las investigaciones más conocidas en el campo de las habilidades matemáticas partió de la selección de problemas y acertijos de la matemática recreativa[1].

Seguramente, el hombre, poco tiempo después de que descubrió las operaciones aritméticas, elaboró los primeros acertijos matemáticos... y desde entonces no ha dejado de hacerlo.

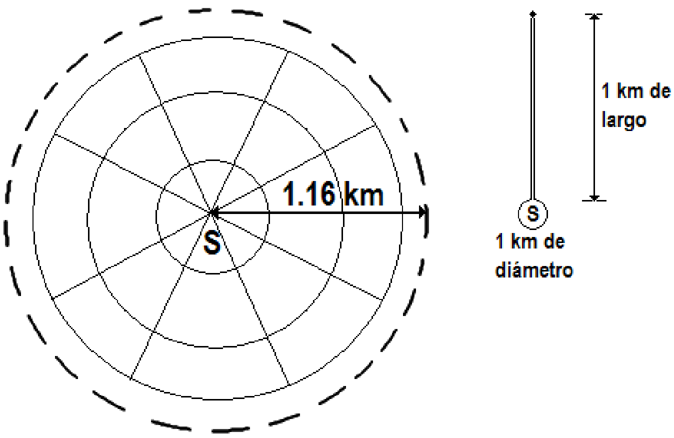
Desde los caldeos y los griegos, se conocen algunos acertijos, pero sólo se trataba de problemas aislados. El primer libro de recreaciones matemáticas del cual se tiene noticia[2] lo escribió el hindú Lilawati para su hija, en el siglo XII.

En matemáticas, otra frontera indistinguible la tenemos entre acertijos y juegos. Aunque existe una rama de las matemáticas llamada Teoría de juegos, resulta que es un acertijo encontrar una estrategia vencedora en un juego. Por esta razón, los juegos matemáticos pueden ser presentados siempre a manera de acertijo.

Para darle sustancia a lo que se ha dicho, empecemos con un problema relativamente viejo, y el cual estoy seguro que ya conocen todos ustedes.

Un explorador camina un kilómetro hacia el sur, gira a su izquierda y camina un kilómetro hacia el este, vuelve a girar hacia su izquierda y camina un kilómetro hacia el norte. Se encuentra de regreso en el punto de partida. Le dispara a un oso. ¿De qué color es el oso?

La respuesta tradicional es "blanco", porque el explorador debió haber partido del Polo Norte[3]. Bastante tiempo después, alguien se preguntó si esa sería la única solución posible y, luego de que trabajó en ello, descubrió que el Polo Norte no es el único punto de partida que satisface las condiciones dadas (caminar un kilómetro hacia el sur, después uno hacia el este, y por último uno hacia el norte para quedar en el punto de partida).



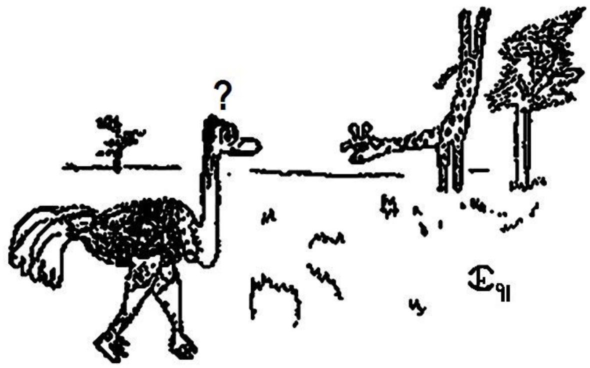
Si examinamos la zona del Polo Sur, en un mapamundi, nos daremos cuenta que cualquier punto de un paralelo situado a poco más de 1.16 kilómetros del polo cumple esas condiciones, pues después de caminar un kilómetro hacia el sur, y luego

[1] KRUTETSKII, V.A. *The psychology of mathematical Abilities in schoolchildren*. The University of Chicago Press. Chicago, EUA. 1976.

[2] ALEM, JEAN PIERRE. *Juegos de ingenio y entretenimiento matemático*. Editorial GEDISA. México. 1986.

[3] GARDNER, MARTIN. *Diversiones Matemáticas.* Editorial SELECTOR. México. 1989.

caminar un kilómetro en dirección este, se daría exactamente una vuelta alrededor del Polo Sur. Pero este paralelo no es el único que cumple las condiciones del problema. ¿Puedes decir cómo encontramos más sitios que cumplen con las condiciones dadas, aunque no haya osos en el Polo Sur. Encontrar la respuesta es muy fácil conociendo el resultado anterior, ya que podría partirse de puntos cada vez más cercanos al Polo Sur, de tal manera que la caminata hacia el este haría que diéramos dos vueltas alrededor del Polo, o tres vueltas, o cuatro, etcétera. Es decir, hay una infinidad de paralelos, donde cualquiera de sus puntos satisface las condiciones dadas.



La manera en que se resuelve un acertijo, o un problema, depende mucho de las vivencias y conocimientos de quien le da solución. Para ejemplificar esto, resolvamos el siguiente acertijo[4]:

En un recinto del zoológico se tienen dos tipos de animales: avestruces y jirafas. Hay 30 ojos y 44 patas, ¿cuántos animales hay de cada tipo? (Obviamente, todos los animales son normales y están sanos.)

Resolver este problema por ensayo y error, esto es "al tanteo", nos obligaría a probar diferentes valores para los animales. Desde luego que habrá quien lo intente hacer sin sistema, haciendo propuestas sin ningún orden; otros quizá procedan de manera sistemática, teniendo como guía a los datos: puesto que 30 ojos equivalen a 15 animales (suponemos que tienen dos ojos pues son normales, tampoco hay tuertos pues están sanos), y probarán primero con 0 jirafas y 15 avestruces para ver si la suman de las patas es 44; si no funciona, después probarán con 1 jirafa y 14 avestruces; luego 2 jirafas y 13 avestruces, etcétera, hasta que le atinen. Desde luego que el sistema es mejor si permite aproximarnos cada vez más rápido a la solución.

Otra manera de resolverlo es mediante el álgebra. Si llamamos j al número de jirafas y a al número de avestruces, el problema se reduce a resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$a + j = 15 \quad \text{animales}$$

$$2a + 4j = 44 \quad \text{patas}$$

Ahora examinemos una solución aritmética: Supongamos que estos animales son tan inteligentes que pueden comprender lo que les digamos, pero que no lo son tanto y nos obedecen cuando les ordenamos algo. Así, si les diéramos la orden "párense en dos patas", ¿cuántas patas habría en el piso? Obviamente 30, un par por cada animal. ¿Cuántas patas habría en el aire? Es fácil calcular que serán 44 - 30 = 14, es decir, todas menos las que están en el piso. A qué tipo de animales pertenecen las patas que están en el aire? ¡Claro que a las jirafas! Ello significa que hay 7 jirafas, por lo tanto habrá 8 avestruces. Espero que con este ejemplo, quede claro que la forma de resolver un acertijo no es única.

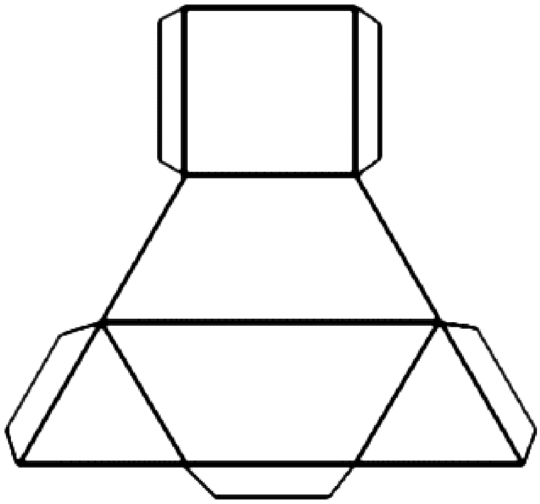
Algunos acertijos están relacionados con las habilidades matemáticas mucho más de lo que aparentan. Un ejemplo de ello es un conocido rompecabezas de ¡sólo dos piezas![5], para fabricarlo es necesario construir dos piezas iguales. En la figura de la página siguiente está el desarrollo de cada pieza, el cual se forma con un cuadrado de 5 *cm* de lado; dos triángulos equiláteros también de 5 *cm* de lado; y dos trapecios, con 10 *cm* de base mayor y el ángulo que forma ésta con los lados contiguos es de 60°. Una vez que se tengan las piezas, hay que formar con ellas un tetraedro regular (pirámide de base triangular) **.**

Una de las habilidades que quizá importa mucho para resolver este rompecabezas es la flexibilidad de pensamiento.

---

[4] GARDNER, MARTIN. *Inspiración ¡ajá!* Editorial Labor. Barcelona, España. 1981.
[5] GRUPO MAT-MAT. *Rompecabezas tridimensional*. En Revista CHISPA, Núm. 92

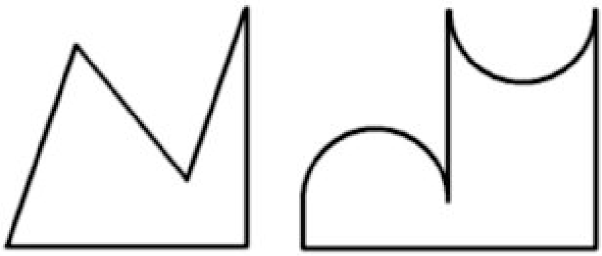
En la mayoría de la gente, conforme aumenta su edad, disminuye la flexibilidad de su pensamiento. Quizá ello se deba a que piensan solamente en ensayar estrategias que antes les han dado buen resultado. Para dar una idea de la manera en la que esto puede variar, mencionaré que de 50 muchachos de bachillerato que intentaron armar el rompecabezas, solamente 10% lo logró, y emplearon para ello un promedio de 6 minutos con 6 segundos; en contraparte, de 20 niños de primaria que lo intentaron, el 85% lo resolvió y para ello utilizaron 2 minutos con 36 segundos en promedio[6].



Los acertijos matemáticos son de una gran variedad. Pueden agruparse de acuerdo a los contenidos matemáticos con los que se resuelven (claro que la gran mayoría pertenecerían a más de un grupo), obteniendo as! una lista tan extensa como la de la cantidad de ramas que tiene la matemática, y existirían acertijos aritméticos, geométricos, algebraicos, lógico-deductivos, criptográficos, etc. Asimismo, algunos prefieren agruparlos según el material al que se hace referencia para exponerlo, teniendo así: con monedas, con cerillos, con cuerdas, con cartas, con papel doblado, fichas de dominó, pesas y medidas, etc. Otra forma de agruparlos es también de acuerdo a las habilidades matemáticas para resolverlo. En fin, son muchos los autores y recopiladores de acertijos que los tipifican, pero ninguna clasificación; es decir separados en conjuntos que no tengan elementos en común. No obstante lo anterior, algunos de los grupos o subgrupos propuestos, están definidos de manera muy nítida (aunque no sin traslapes), por ejemplo los de disecciones geométricas. He aquí un acertijo de éstos[7].

Dividir mediante un trazo las siguientes figuras, de modo que resulten dos piezas idénticas.

Si la figura en cuestión fuese simétrica, por ejemplo un paralelogramo, la solución sería fácil, y desde luego que no sería la única en ese caso.



Otro grupo que se emplea mucho es el de acertijos lógicos. A continuación ponemos uno de los más sencillos, donde la solución demanda ingenio[8].

Un pastelero recibe tres paquetes con 100 caramelos cada uno. Uno de los paquetes contiene caramelos de naranja, otro de limón y el tercero mitad y mitad: 50 de naranja y 50 de limón. Pero el fabricante le advierte que, a causa de un error de envasado, las tres etiquetas —naranja, limón y surtidos— de los paquetes están cambiadas. ¿Cuántos caramelos tendrá que sacar, como mínimo, el pastelero, para averiguar el contenido de cada paquete?

---

6 LOYOLA CAMPOS, ELÍAS. *El tetraedro*. En REVISTA DEL SEMINARIO DE ENSEÑANZA Y TITULACIÓN, Núm. 9, mayo de 1987. Facultad de Ciencias. UNAM. México. Págs. 41-69.

7 SENDRA FERRER, RAFAEL. *Disección*. En la Revista CACUMEN, Año 1, Núm. 6. Zugarto Ediciones S.A. Madrid, España, julio de 1983 (pág. 37).

8 FRABETTI, CARLO. *Juegos de ingenio*. Editorial Bruguera. Barcelona, España. 1981.

Lo que en el fondo caracteriza a los problemas lógicos es la articulación de premisas para obtener una conclusión. Esto es lo que se denomina método deductivo.

Algunos de ellos tienen apariencia de ser complicados, pero existe un método que hasta las máquinas computadoras emplean y con ello pueden resolverse. En el siguiente, el cual adaptamos de donde lo tomamos [9], daremos una ayuda que será fácil de utilizar para casos similares.

Trata de averiguar, mediante la deducción, los nombres que tenían las madres de Albert Einstein, Enrico Fermi y Niels Bohr, así como la profesión que tenían sus respectivos padres (entre contador, fisiólogo e ingeniero). Para lograrlo utiliza los siguientes datos:

a) La señora Paulina estuvo casada con un ingeniero.

b) El esposo de Ellen no fue contador.

c) La madre de Albert Einstein no se llamaba Ida.

d) El padre de Niels Bohr fue fisiólogo.

Para resolver éste, y otros del mismo tipo, puede usarse una matriz que contenga a todas las posibilidades (27 en este caso) y, de acuerdo a las premisas, ir anotando **O** cuando la posibilidad es cierta, y **X** cuando se falsa. En este caso ya se han colocado los signos correspondientes a la primera premisa: “La señora Paulina estuvo casada con un ingeniero”. Así, en la intersección de la columna que corresponde a “Paulina” con el renglón que le toca a “Ingeniero”, hemos colocado **O**. Por consecuencia, hemos colocado **X** a las intersecciones “Paulina-Contador” y “Paulina-Fisiólogo”, análogamente hemos puesto **X** en las de “Ingeniero-Ellen” e “Ingeniero-Ida”.

		Madre			Padre		
		Ellen	Ida	Paulina	Contador	Fisiólogo	Ingeniero
Cienti.	Einstein						
	Fermi						
	Bohr						
Padre	Contador			**X**			
	Fisiólogo			**X**			
	Ingeniero	**X**	**X**	**O**			

En el caso anterior, se partió del supuesto que todos los datos eran ciertos. Sin embargo, en ocasiones los acertijos pueden decir algo sobre los valores de verdad de los datos que dan, como en el siguiente [10]:

Se tienen tres cofres: uno de oro, otro de plata, y el último de plomo. Cada uno de ellos tiene una leyenda, y a lo sumo una de éstas es cierta. ¿Dónde está el retrato?

Sin embargo, en ocasiones no es posible realizar tales deducciones sin caer en contradicciones. Un ejemplo de ello es la autorreferencia. El caso más simple de esto es:

[9] ____. Revista Logic; Año II, Núm. 8. Zugarto Ediciones S. A. Madrid, España.
[10] SMULLYAN, RAYMOND. *¿Cómo se llama este libro?* Editorial Cátedra S.A. Madrid, España. 1985.

Da el valor de verdad (cierto o falso) de la siguiente proposición:

"Esta proposición es falsa"

Como puede verse, al dar un valor de verdad, en cualquier caso se llega a una contradicción. Existen muchos acertijos que hacen uso de esta cualidad de autorreferencia, por demás ya excluida del estudio de la lógica de primer orden. En este caso nos enfrentamos a una paradoja de tipo semántico. ¿Pero qué es una paradoja?

Esta palabra se empezó a usar en el español alrededor del siglo XVI, y proviene del griego *parádoxos* (de *pará*=contra; y *dóxa*=opinión); por tanto, una paradoja es algo que va en contra de lo establecido, aunque prefiero decir que es algo que va en contra del sentido común. Ello no necesariamente significa que ese algo esté violando una ley natural. Puede suceder que simplemente nos resulte asombroso, y en ocasiones hasta molesto, creer que se dé algo en contra de nuestra experiencia cotidiana.

El filósofo y matemático francés René Descartes (1596-1650), decía que el sentido común era lo que estaba mejor repartido ya que todos creían tener una muy buena cantidad de ello.

Para fines de los acertijos matemáticos, es satisfactorio separar a las paradojas en tres tipos[11]:

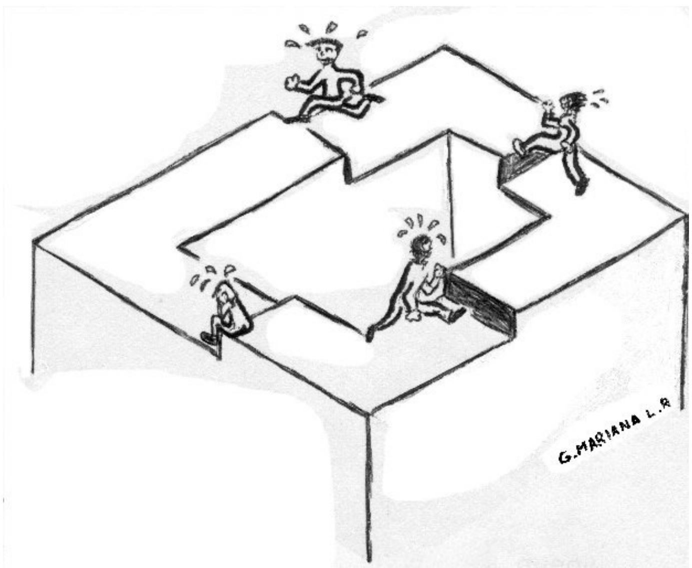
1) Una afirmación aparentemente contradictoria pero que en realidad es verdadera.

2) Una afirmación aparentemente verdadera pero que en realidad contiene una contradicción.

3) Un argumento válido o lógico que conduce a conclusiones contradictorias.

Evidentemente, las afirmaciones paradójicas de los tipos 1 y 2 son en muchos casos, aunque no siempre, conclusiones derivadas de argumentos del tipo 3.

También se consideran como paradojas a una gran parte de las ilusiones ópticas, como la de la ilustración adjunta, hecha por una alumna del CCH, e inspirada en los grabados de Mauricio Cornelio Escher. En este caso no es tan difícil observar a cuál de los tipos de paradojas mencionados corresponde.



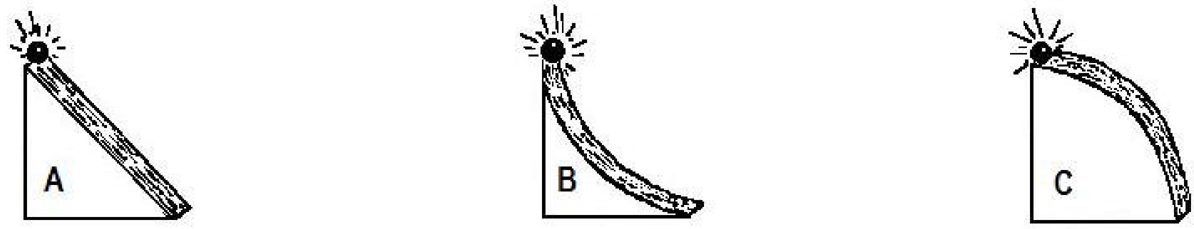
La cantidad de asuntos que pueden sorprender a nuestro sentido común es muy grande, pero la molestia que nos causa no entender algo está directamente relacionada con nuestra ignorancia y con nuestros prejuicios, los cuales en ocasiones se manifiestan de manera muy sutil y nos damos cuenta de ello sólo al cuestionarnos sobre por qué afirmamos tal o cual cosa (o actuamos de tal o cual manera). Va un ejemplo[12]:

En las piezas de la figura de la siguiente página, si las bases y las alturas respectivas son iguales, ¿cuál es la trayectoria por la que baja más pronto la canica? Una vez que hayas elegido cuál, habrás de dar una justificación para tu respuesta.

---

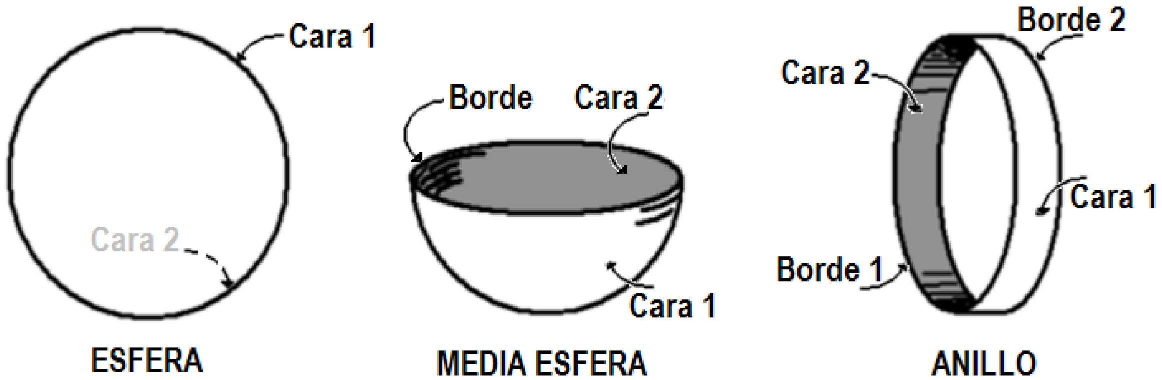
[11] FALLETA, NICHOLAS. *Paradojas y juegos, ilustraciones, acertijos y problemas imposibles*. Editorial GEDISA. Barcelona, España. 1986.

[12] ____. *Contra la obviedad*. En el boletín del Club de Matemáticas del CCH Sur, No. 1, febrero de 1987 (Pág. 11).

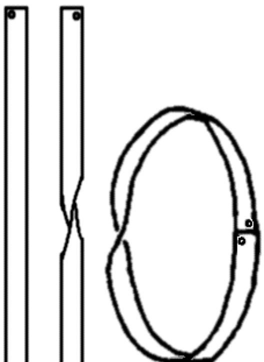


Es bueno tratar de comparar las distintas argumentaciones que se pueden dar, pero en este caso, si no se recurre a la demostración empírica o a la demostración matemática, difícilmente podría haber bases para la discusión.

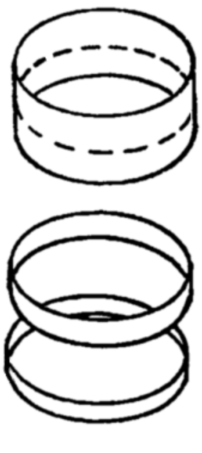
Cuando tenemos que argumentos y deducciones son correctos, lo único que nos resta es aceptar que nuestro sentido común está equivocado (paradoja aparente). Los matemáticos, al encontrarse ante una paradoja de este tipo, saben que seguramente encontrarán material suficiente para avanzar en la construcción de algunas áreas de la matemática al estudiar el problema que le dio origen.

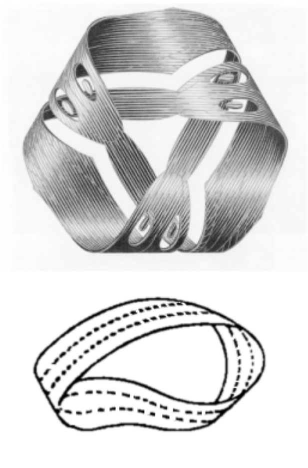


Precisamente algo de este tipo tenemos en las superficies. Una esfera es una superficie con dos caras y ningún borde; media esfera, tiene dos caras y un borde; y un anillo, dos caras y dos bordes[13].



El matemático alemán Auqust Ferdinand Möbius (1790-1868), describió la manera en la cual se puede construir una superficie con una cara y un borde. Para hacerla basta tomar una cinta de papel y pegar sus extremos después de haberlos retorcido media vuelta. Si cortas un anillo, a lo largo, por la mitad, obtienes dos anillos. Pero si cortas de la misma manera una banda de Möbius, obtienes una sola banda. ¿Será también de Möbius? Las paradojas con esta cinta continúan,¿qué pasa si la cortas a lo largo, pero conservando





[13] LOYOLA CAMPOS, ELÍAS. *La cinta de Möbius*. En la revista EDUCACIÓN MATEMÁTICA. Vol. 3 No. 1. Abril de 1991.Grupo Editorial Iberoamericana S. A. de C. V.

siempre como distancia al borde una tercera parte del ancho? ¡Prueba tu sentido común! Trata de imaginar el resultado antes de hacerlo.

Prácticamente, cualquier cosa que ignoremos, pero de la cual nos preguntemos algo es, por ello, un acertijo. Eso pasa también en los llamados juegos de "adivinación", donde el juego se convierte en un acertijo al querer saber cómo es que funciona el truco. Aquí está uno:

a) Escoge un número cualquiera de la siguiente lista y enciérralo en un círculo.

b) Tacha todos los otros números que estén en el mismo renglón o columna que él.

c) Escoge otro número de los que están sin tachar. Enciérralo en un círculo y repite el paso b.

2	**1**	**3**	**0**	**4**
3	**2**	**4**	**1**	**5**
5	**4**	**6**	**3**	**7**
4	**3**	**5**	**2**	**6**
6	**5**	**7**	**4**	**8**

d) Repite el paso c mientras existan números sin tachar o sin encerrar en un círculo.

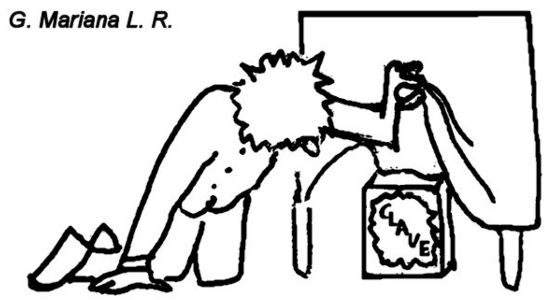
e) Suma todos los números que encerraste en los círculos.

f) El resultado del paso e es 20.

Los acertijos, algunos problemas recreativos y otros problemas que surgen de las paradojas aparentes, han sido grandes motores de las matemáticas, más aún, al estar investigando cómo se resuelve un acertijo matemático dado, por lo general se están haciendo matemáticas. Sin embargo, es muy bueno tener un sistema para resolver problemas. Cada quien va construyendo su propio sistema, pero no está de más tener alguna guía para hacerla. Aquí van algunas sugerencias[14].

A) **Antes de hacer, trata de entender.** Es importante tener muy claro de qué datos y restricciones partes; y hacia dónde debes ir.

B) **En busca de estrategias.** Hay que tratar de ver todas las posibles maneras en las que sería factible resolver el problema, por ejemplo:



- Busca semejanzas con otros juegos y problemas.
- Empezar por lo fácil, hace fácil lo difícil. Es decir, examina el asunto como si tuvieras menos elementos y restricciones.
- Experimenta y busca regularidades y pautas, la búsqueda por ensayo y error también es algo común en matemáticas.
- Hazte un esquema, o dibujo, del problema... y si se complica, píntalo de colores. Dicen que una imagen vale más que mil palabras.
- Modifica el problema, cambia en algo el enunciado para ver si se te ocurre así un posible camino.
- Escoge una buena notación. Es más fácil resolver un problema cuando recurrimos a los símbolos... pero hay que ser sencillos en nuestra elección.

[14] GUZMÁN, MIGUEL DE. *Aventuras matemáticas*. Editorial Labor. Barcelona, España. 1986.

- Explota la simetría..., si puedes. Muchos problemas se resuelven si nos fijamos en esta propiedad.

- Plantéate a dónde te conduce suponer que no es cierto lo que afirma el problema. Si quieres demostrar que una situación se comporta de X manera, empiezas suponiendo que no se comporta así; si mediante el razonamiento llegas a la conclusión de que lo blanco es negro (es decir, un absurdo), entonces es claro que el punto de partida, no sucede X, tiene que ser falso. Así, la situación tiene que ser X.

- Supón que ya está resuelto el problema, ¿qué cosas deben suceder? Esto es muy útil sobre todo donde se te pida construir una figura. Descubrirás así algún elemento que debe estar muy relacionado con las reglas del juego o las condiciones del problema.

- Piensa en técnicas generales. La matemática hace uso de muchos métodos, entre mayor sea tu arsenal, será más fácil poder resolver algo. Con el tiempo aprenderás muchos de los métodos.

C) **Lleva adelante tu estrategia.** No sólo es suficiente disponer de algunas posibles estrategias para resolver un problema, también es necesario ponerlas a funcionar, ¿pero, cómo? Pondera de manera serena cada una de ellas.

- Lleva adelante las que consideres mejores. Pruébalas una a una.

- Si el asunto no sale, no desistas fácilmente. Pero tampoco te comprometas demasiado con una sola idea. Si las cosas se complican, probablemente hay otra vía.

- Si crees que ya está resuelto, asegúrate de ello, mira a fondo tu solución. Comprueba que ya está bien resuelto, que cumple todas las condiciones exigidas.

G. Mariana L. R.

D) **Saca jugo a tu experiencia.** Si lo pudiste resolver ¡qué bueno! Si no pudiste (después de varias horas de estar entretenido intentando resolverlo) y por fin te decidiste a ver la solución, analizar a ésta puede ser mucho muy productivo ya que tendrás mejor idea sobre las dificultades que tuviste y por qué te surgieron, además de que te será de mucha utilidad para no cometer los mismos errores en el futuro. Puede ser muy provechoso, si realizas acciones como las siguientes:

G. Mariana L. R.

- Examinar a fondo el camino que has seguido. ¿Cómo llegaste a la solución? o ¿por qué no llegaste a la solución?

- Trata de entender que la cosa marcha bien así, pero sobre todo también averigua por qué tiene que ser así.

- Trata de ver si ahora puedes hacerlo de un modo más simple. Quizá hay alguna manera más sencilla de resolver el problema, ¡trata de encontrarla!

- Examina el método que has seguido y ve qué tanto puede ser de utilidad en otras circunstancias.

- Reflexiona un poco sobre tu propio proceso de pensamiento y saca consecuencias para el futuro. ¿Te ayudan más las figuras? ¿Es más fácil resolver algo cuando simbolizas o dependes más de la expresión en palabras (sea oral o escrita)? ¿Te obsesionas fácilmente y sólo das vueltas a la misma idea? ¿Cómo hacer para fomentar la flexibilidad del pensamiento y la creatividad? Analizar todo esto te servirá de mucho, no solamente en matemáticas.

Es importante estar atentos a nuestra propia forma de pensamiento, y no dejar que nos dominen los prejuicios. Toma muy en cuenta lo siguiente:

- Un problema puede tener muchas soluciones. Cuando llegamos a encontrar una de ellas, podría suceder que ya está todo hecho, pero tal vez esa solución no sea la mejor, ni la más adecuada. Es necesario que de manera sistemática, recurras a la autocrítica.
- Es conveniente que mantengas la mente abierta, entre más trabajes tendrás más éxitos. Destierra los temores a equivocarte, en ocasiones tendrás que intentar otra vez sobre algún ensayo fallido, pero todo ello te dejará más experiencia.
- ¡Deja volar tu imaginación!, ello hará que seas prolijo en ideas, de allí podrás escoger las que creas mejores para llevarlas a cabo, tal vez alguna de ellas te conduzca a un descubrimiento de gran importancia, desde luego, realizando el trabajo suficiente e invirtiendo el tiempo necesario.
- Entrena de manera cotidiana a tu mente, la disciplina es la única manera para estar siempre en forma. La generación de ideas y soluciones, así como la crítica para perfeccionarlas, son algo común en las personas entrenadas en el pensamiento.

Seguramente estarás deseoso de poner a trabajar tu intelecto. A continuación van algunos acertijos matemáticos que te servirán de entrenamiento. Algunos son muy sencillos, pero otros requieren que te ocupes durante largo rato de ellos (tal vez horas), y si te das por vencido, busca en las soluciones. No te desanimes, recuerda que pensar bien sólo puede ser el resultado de haber aprendido a pensar... y de reflexionar sobre por qué algunas veces te equivocas.

1) En 855, el emperador de China Yang Suen tenía que cubrir un puesto importante al que aspiraban dos mandarines de títulos equivalentes. El emperador decidió elegir a aquel que resolviera primero el siguiente problema[15]:

El jefe de unos bandidos decía a sus hombres:

— Hemos robado unas piezas de tela. si cada uno de nosotros toma seis, quedarán cinco piezas. Pero si cada uno de nosotros quiere siete, nos faltarán ocho. ¿Cuántos eran los ladrones?

Como en aquella época no se conocía el álgebra en la China, los mandarines tuvieron que resolver el problema valiéndose de la aritmética. Nosotros nos proponemos hacer lo mismo.

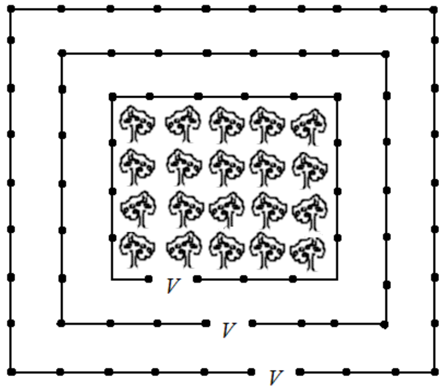
2) Sean $A,\ B$ y C los vértices de un triángulo con lado mayor BC ¿De qué manera deberá cortarse el triángulo para armar con todas sus piezas un rectángulo (obviamente de la misma área)?

3) En un saco blanco tienes 2000 canicas blancas y en otro saco rojo, tienes 3000 canicas rojas. Del saco blanco pasas al rojo 50 canicas. Revuelves, bien revueltas las canicas del saco rojo, sacas 50 canicas, sin mirarlas, y las metes en el saco blanco. Repites la operación: del saco blanco pasas ahora al rojo 100 canicas, revuelves, y sacas del saco rojo 100 canicas, también sin verlas, que pasas al blanco. ¿Hay, al final de estas operaciones, más canicas blancas en el saco rojo que canicas rojas en el saco blanco, o al revés?

4) Un huerto de naranjas, está sitiado por tres cercas, y cada cerca sólo tiene una puerta de acceso. Además, en cada una de estas puertas hay un vigilante (V), tal como se muestra en la figura de la página siguiente. Cada uno de los vigilantes permite el acceso al huerto para cortar las naranjas que se quiera, a condición de que al pasar de regreso por su respectiva puerta le dejen la mitad de las naranjas que traigan

[15] ALEM, JEAN-PIERRE. *Juegos de ingenio y entretenimiento matemático*. Editorial GEDISA. México. 1986.

en ese momento, y media naranja más, pero para cumplir con el requisito no deberá partirse ninguna naranja. ¿Cuál es la mínima cantidad de naranjas que deberás cortar, si lo que deseas es comerte sólo una naranja?



5) Cinco inquilinos de un gran edificio de viviendas acaban de adquirir, cada uno por su parte, unos aparatos telefónicos. De acuerdo a las pistas que se dan a continuación, habrá que determinar cuál número telefónico le corresponde a cada quien, así como el color de su aparato y el lugar donde lo colocó.

a) El aparato verde, que no pertenece a la Srita. Adela, posee un número cuyas cifras suman diez.
b) El teléfono del Sr. Garzón se encuentra en la cocina; su número es inferior al que tiene la Sra. Rius.
c) El número del aparato que se encuentra en el dormitorio es el 1023.
d) La cifra del número mayor corresponde al teléfono de una de las señoritas; ni su aparato ni aquel que tiene el número inferior es el rojo.
e) El Sr. Sanz escogió un teléfono gris. La señorita Carmen no tiene instalado su teléfono en el pasillo.
f) El teléfono azul, que pertenece a una persona casada, se encuentra en el estudio; mientras que el negro, que no ha sido instalado en la cocina, tiene número 3210.
g) Por último, falta aclarar que alguien tiene su aparato en la sala; y que tres de los aparatos tienen números 2301, 4321 y 5320.

6) EL LEÓN y EL UNICORNIO[16]

Cuando Alicia entró en el Bosque del Olvido no lo olvidó todo, solamente ciertas cosas. A menudo olvidaba su nombre, y una de las cosas que más disposición tenía a olvidar era el día de la semana. Ahora bien, el León y el Unicornio visitaban frecuentemente el bosque. Los dos eran criaturas extrañas. El León mentía los lunes, martes y miércoles y decía la verdad los otros días de la semana. El Unicornio, por otra parte, mentía los jueves, viernes y sábados, pero decía la verdad los restantes días de la semana.

a) Un día Alicia se encontró con el León y el Unicornio que descansaban bajo un árbol. Ellos dijeron lo siguiente:

León: Ayer fue uno de los días en los que me tocaba mentir.

Unicornio: Ayer fue también uno de los días en los que me tocaba mentir.

A partir de estos dos enunciados, Alicia (que era una chica muy lista) fue capaz de deducir el día de la semana. ¿Qué día era éste?

b) En otra ocasión Alicia encontró al León solo. Éste dijo:

(1) Ayer mentí.

(2) Mentiré de nuevo dentro de tres días.

¿En qué día de la semana sucedía esto?

c) En qué días de la semana le es posible al León hacer los dos enunciados siguientes:

(1) Ayer mentí.

[16] SMULLYAN, RAYMOND. *¿Cómo se llama este libro?* Editorial Cátedra S.A. Madrid, España. 1985.

(2) Mañana mentiré de nuevo.

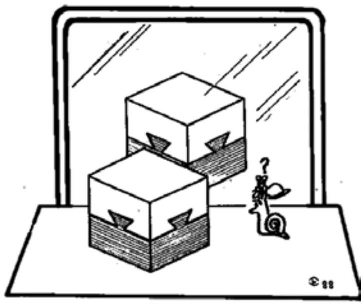
d) En qué días de la semana le es posible al León decir: "Ayer mentí y mañana mentiré de nuevo". Aviso: La respuesta no es la misma que la del problema anterior.

7) Carolina hizo un pastel que dividió en cuatro porciones: dos de 1/4, una de 1/3 y una de 1/6. Ella comió una de las porciones y le dio las otras tres a su hermano Juan, quien a su vez comió una porción y los dos hijos de éste (Margarita y Pedro) comieron las restantes.

- El gemelo del que comió la mayor porción y quien comió la menor son de sexos opuestos.

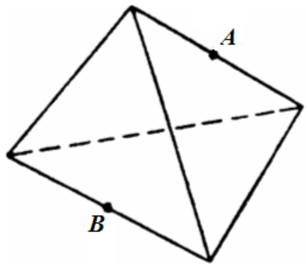
- Quien comió más y quien comió menos tienen la misma edad.

¿Qué parte del pastel comió cada uno?



8) En una ocasión, nos presentaron un cubo hecho con dos piezas de madera, y sus cuatro costados laterales mostraban sendas "colas de milano", lo cual nos parecía imposible. Pero el diseñador nos aseguró que, efectivamente, eran dos piezas unidas simplemente por deslizamiento. ¿Cómo logró hacerla?

9) Un tetraedro regular tiene 10 *cm* de lado. A y B son los puntos medios de dos aristas opuestas de él. ¿Cuál es la distancia que hay entre A y B?



10) Todas mis camisas, excepto dos, son completamente blancas; también, todas mis camisas, excepto dos, son completamente azules; y, todas mis camisas, excepto dos, son completamente amarillas. ¿Cuántas camisas tengo en total? y si es posible, dime el color de cada una de ellas. (ATENCIÓN: La solución no es única.)

11) Los González y los Martínez se encuentran por la calle, y rápidamente se produce un efusivo intercambio de besos y abrazos. Cada uno de los Martínez saluda a cada uno de los González. Al saludarse dos varones se dan un abrazo, mientras que al saludarse dos mujeres, o un hombre y una mujer, se dan un beso. Al final de la efusiva salutación se han producido 35 abrazos y 42 besos. ¿Cuántas mujeres y cuántos varones hay en cada familia?

12) Una persona entró a una tienda con una cierta cantidad de dinero y gastó en ella las tres cuartas partes de éste. Al salir descubrió que traía tantos centavos como pesos había tenido al entrar y tantos pesos como la cuarta parte de los centavos que había tenido. ¿Cuánto dinero tenía al entrar?

Podríamos continuar con una gran cantidad de acertijos más, pero también debemos darte oportunidad a que los busques. En la realidad, nos encontramos en todo momento con ellos, aunque no sean del tipo matemático, casi están en todo. En especial yo he encontrado una gran veta en la gente... Sí, estoy convencido de que cada humano es un Puzzle diferente en cada instante.

Las soluciones de los acertijos planteados puedes encontrarlas a partir de la página 16, pero recurre a ellas después de que hayas trabajado para resolverlos.

Tal vez ya te estés preguntando de dónde salieron los acertijos que están propuestos. Algunos de ellos están publicados en libros o revistas, como ya está señalado en las notas de pie de página con el número respectivo, otros son modificaciones de acertijos publicados, un par son del autor y los demás son muy conocidos. Sin embargo sería muy bueno que tú también intentaras crear algunos. Existen colecciones de acertijos, ya publicadas, que se conforman de la misma manera en la que se incluyeron los de este folleto, mediante recopilaciones, modificaciones y creaciones propias.

Dichas colecciones contienen acertijos de diversos grados de dificultad y de vez en cuando incluyen otros que no son del tipo matemático. La mayoría de estas publicaciones no están en español, en particular las revistas, sin embargo son muchos los libros que se han traducido.

Si estás interesado en más acertijos, a continuación se recomiendan algunas obras. Conviene aclarar que muchos de los acertijos matemáticos se encuentren de manera reiterada en distintos libros. Algunos autores hacen variantes en los resultados, otros destacan por la manera en la que exponen la solución.

Estos libros pueden resultarte convenientes para recorrer de manera amable a las matemáticas, sea mediante acertijos, juegos o algunas actividades recreativas.

La siguiente es una bibliografía de textos que se han publicado en español; tal vez algunos libros ya estén agotados y no se hayan reimpreso, pero quizá los encuentres en las bibliotecas. Esta selección fue hecha con criterios muy personales, pero teniendo en mente a James R. Newman, cuando dice[17]:

> "... los rompecabezas son, sin duda, una de las creaciones humanas mis interesantes, y el análisis de su estructura está lleno de imprevistos y aventuras. Desgraciadamente, nunca faltan matemáticos capaces de transformar los excelentes ingredientes que tienen a su disposición y cocinar con ellos manjares con sabor a estopa."

No se trata de que veas todos de una vez ¡No! Hojéalos en la librería o en la biblioteca y léelos (o cómpralos) de acuerdo a tus intereses.

Iniciaré con uno de mis autores favoritos, Martin Gardner (nació el 21 de octubre de 1914 en Tulsa, Oklahoma, E.U.A.), quien ha sido un constante divulgador y crítico de la ciencia a través de articulos y ensayos que ha escrito para muchos periódicos y revistas. Asimismo, es autor de una extensa cantidad de libros y la mayoría de ellos tienen como materia prima a sus trabajos periodísticos. En particular, sus libros de recreaciones matemáticas están alimentados con el material que escribió para su columna mensual Juegos matemáticos en la revista Scientific American, durante 25 años. Algunos de estos libros son juegos para “gente grande” y hay que leerlos despacio para entender los conceptos que se están empleando.

- Hasta ahora hay cuatro libros en Alianza Editorial, de España (núms. 391, 778, 937, 1023 y 1549 de El libro de bolsillo) con los títulos:
    - Nuevos pasatiempos matemáticos (1972)
    - Carnaval matemático (1980)
    - Circo matemático (1983)
    - Festival mágico-matemático (1984)
    - El ahorcamiento inesperado y otros entretenimientos matemáticos (1991)

---

17 NEWMAN, JAMES R. *Sigma -El mundo de las matemáticas-*.Ediciones Grijalbo, S. A. Barcelona-México D. F. 1968.

- La editorial GEDISA, en su serie Juegos (humor y entretenimiento "serio"), tiene:
  - Los mágicos números del Doctor Matrix (1986)
  - Juegos y enigmas de otros mundos (1987)
  - Huevos, nudos y otras mistificaciones matemáticas (2002)
  - Damas, parábolas y más mistificaciones matemáticas (2002)
- La editorial Labor, de Barcelona, tiene:
  - Inspiración ¡ajá! (1981)
  - Paradojas ajá! (1982)
  - Ruedas, vida y otras diversiones matemáticas (1985)
  - Rosquillas anudadas y otras amenidades matemáticas (1988)
  - Viaje. por el tiempo y otras perplejidades matemáticas (1988)
  - Mosaicos de Penrose y escotillas cifradas (1990)
- De otras editoriales están:
  - *Diversiones matemáticas*. Ed. SELECTOR. México. 1989.
  - *Mental Games*. Ed. SELECTOR. México. 1990.
  - *Rompecabezas mentales*. Ed. SELECTOR. México. 1990.
  - *Nuevos rompecabezas mentales*. Ed. SELECTOR. México. 1991.
  - *Comunicación extraterrestre y otros pasatiempos matemáticos*. Ed. Cátedra. Madrid, España. 1986.
  - *Miscelánea matemática*. SALVAT. No. 49 de la Biblioteca Científica Salvat. Barcelona, España. 1986. (Nota: este libro es un compendio de capítulos seleccionados de los títulos señalados en Alianza Editorial en 1980, 1983 y 1984).

Otro de mis autores favoritos, ya que mediante sus obras me inicié de niño en los acertijos matemáticos (y de la física), es Yákov Isidórovich Perelmán (nació en 1882, en Bielostok, y murió el 16 de marzo de 1942 en Leningrado, URSS, cuando las fuerzas fascistas alemanas sitiaron esa ciudad). Uno de los mejores divulgadores de la ciencia, escribió además libros de texto y artículos en numerosas revistas, siendo editor en tres de ellas. El hecho de que sus obras sigan reimprimiéndose dice mucho de la trascendencia de su contenido Muchas de sus obras se pueden consultar en español mediante Internet, incluso algunas que no se imprimieron en español, como Geometría recreativa, por ejemplo; se puede ver con otros libros más en la dirección: http://es.geocities.com/yakovperelman1/, y en http://yperelman.ifrance.com/yperelman/.

Sobre matemáticas recreativas se tienen:

- *Aritmética recreativa*. Ediciones de Cultura Popular S.A. México. 1975.
- *Matemáticas recreativas*. Editorial MIR, Moscú. 1959.(Nota: existen muchas reimpresiones más en la misma editorial; también existe en Ediciones Martínez Roca, de Barcelona, España.)
- *Álgebra recreativa*. Editorial MIR, Moscú. 1959. (La misma nota que el anterior libro.)
- *Problemas y experimentos recreativos*. Editorial MIR, Moscú. 1975.

Muy pocas son las personas que de manera constante generan acertijos y juegos matemáticos. Precisamente una de estas rarezas es el matemático, especializado en lógica e inteligencia artificial, Raymond M. Smullyan (nacido en 1919, en Nueva York, E. U. A.). Sus primeros acertijos publicados versaron sobre ajedrez, particularmente son problemas de análisis retrospectivo, técnica no común (hasta antes de Smullyan) en los acertijos clásicos de este ancestral juego. La fuente, al parecer inagotable, de inspiración, de este autor, es la lógica. En palabras de él: "Si mis libros de acertijos tienden a ser distintos de otros, es porque lo que principalmente me interesa son los acertijos que guardan una significativa relación con resultados importantes y profundos en lógica y matemática". ¡Pero no sólo es eso! También redacta con un excelente gusto literario.

La editorial GEDISA, de Barcelona, España, tiene los siguientes:

Juegos y problemas de ajedrez para Sherlock Holmes (1986)
Juegos de ajedrez y los misteriosos caballos de Arabia (1986)
Juegos por siempre misteriosos (1989) (Impreso en México)
Juegos para imitar a un pájaro imitador (1989. En 2000 lo partió en dos tomos)
Satán, Cantor y el infinito (2000)

Por su parte, la editorial Cátedra, de Madrid, España, tiene, en su colección Teorema:

¿Cómo se llama este libro? (1981)
Alicia en el país de las adivinanzas (1984)
¿La dama o el tigre? (1985)

Mariano Mataix Lorda, se propuso como tarea dar a conocer en castellano una colección lo más extensa posible de problemas y curiosidades lógicos y matemáticos que de manera dispersa han circulado desde tiempo atrás. En cuatro libros, este autor ibérico, presenta 300 problemas, con sus soluciones. Los libros están editados por Publicaciones Marcombo S.A. (en México y Barcelona) alrededor de 1978 a 1995, con algunas reimpresiones.

Cajón de sastre matemático.
Fácil, menos fácil y difícil.
El discreto encanto de las Matemáticas.
Divertimentos lógicos y matemáticos.
Nuevos divertimentos matemáticos.
Droga matemática
Ocio matemático
Historias de matemáticos y algunos problemas
Problemas para no dormir
En busca de la solución
La manzana de la discordia
Esbozos biográficos y algunos pasatiempos matemáticos
Dúo matemático (El título se debe a que está como coautora Susana Mataix Hidalgo)

Una importante y divertida colección donde Brian Bolt recopila más de 500 divertimentos matemáticos, muchos de los cuales son entretenidas actividades de investigación con las que es posible comprender bastantes conceptos de las matemáticas, lo constituyen cuatro libros, editados en Barcelona, España, por Editorial Labor.

Divertimentos matemáticos (1987)
Actividades matemáticas (1988)
Más actividades matemáticas (1989)
Aún más actividades matemáticas (1989)

Para continuar en las actividades matemáticas, que forman parte de lo que debieran ser talleres y laboratorios de matemáticas que sustituyeran a una gran parte del método expositivo que se emplea de manera excesiva en los cursos de matemáticas, aquí están tres más:

CHÁVEZ, FERNANDO. *Matemática activa y recreativa*. Ed. Trillas. México. 1974.
GUZMÁN, MIGUEL DE. *Aventuras matemáticas*. Ed. Labor. Barcelona, España. 1986.
MEIROVITZ, MARCO y JACOBS, PAUL I. *Desafíe a su inteligencia*. Ed. Martínez Roca S.A. México. 1985.

SOLUCIONES

A continuación encontrarás las respuestas de los acertijos planteados; en varios de los casos exponemos también las soluciones e incluso unos breves comentarios sobre el particular.

De la página 1

A) Aquí se explota la reflexión especular (de espejo), se trata de los números `1, 2, 3, 4, 5` con sus respectivas reflexiones añadidas a la izquierda. De esta manera la figura pedida tiene que ser 

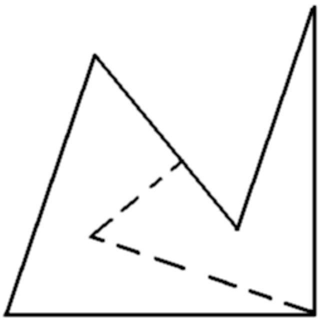
B) Son las iniciales de los primeros siete números cardinales: **U**no, **D**os, **T**res, **C**uatro, **C**inco, **S**eis, **S**iete. Claro, el término siguiente es **O**.

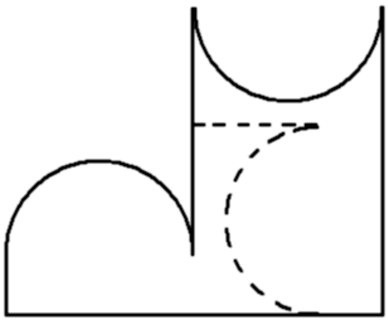
C) Todos los números presentados son números primos consecutivos. Así, los términos pedidos son 23 y 59.

D) Aunque parezca raro, sólo existe una solución y no es tan laborioso encontrarla. Desde luego que es necesario tener alguna habilidad para recordar (o deducir) y utilizar algunos hechos, en particular cómo obtener un residuo cero. A la derecha está la respuesta

```
          1011.1008
625 | 631938
      625
      00693
        625
        0688
         625
         063 0
          62 5
          00 5000
             5000
             0000
```

De la página 4





Sólo un caramelo. Contra todo lo esperado, basta tomar un caramelo del paquete que indica surtidos (allí sólo habrá de un sabor pues todas las etiquetas están cambiadas), y sólo hay dos posibilidades: que el caramelo sea de limón; o que sea de naranja.

Si ese caramelo es de limón, el paquete etiquetado como de limón debe tener sólo caramelos de naranja (no podrían ser surtidos, ya que eso implicaría que los caramelos de naranja estuvieran con la etiqueta correcta), y el etiquetado como naranja tendrá a los surtidos.

Se sigue el mismo razonamiento si el único caramelo que se toma hubiese sido de naranja: el paquete etiquetado como naranja tendrá a los de limón y el paquete etiquetado como limón contendrá a los surtidos.

De la página 5

Las ternas correctas son:

Científico	**Madre**	**Padre**
Einstein	Paulina	Ingeniero
Fermi	Ida	Contador
Bohr	Ellen	Fisiólogo

El retrato está en el cofre de plata. Para resolverlo puedes usar una tabla como la que se muestra aquí, donde F y V son los valores de verdad (Falso y Verdadero) de los enunciados, y examinar cada una de las situaciones. Pero hay una manera más sencilla: los enunciados de los cofres de oro y plomo dicen lo

Oro	F	V	F	F
Plata	F	F	V	F
Plomo	F	F	F	V

contrario, entonces uno de ellos es verdadero. Si a lo sumo uno de los tres enunciados es verdadero, el del cofre de plata es falso y por tanto este cofre es el que tiene el retrato.

De la página 6

Seguramente, quienes afirman que era la trayectoria **A,** tienen un argumento similar a éste: la menor distancia es la línea recta, y como en la trayectoria de A se recorre la menor distancia, la canica debe llegar primero.

Quienes optaron por B o C, ofrecieron argumentos basados en la aceleración que sufría la canica.

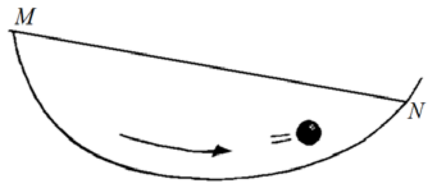
De cualquier manera, dichos argumentos carecen de sentido si no se plantean las correspondientes ecuaciones de movimiento (haciendo uso del cálculo), involucrando a la función que define la trayectoria (que por cierto, en este caso no está claramente definida en las dos últimas opciones).

El problema de la trayectoria de más rápido descenso, lo resolvió Johann Bernoulli en 1696, y retó a los matemáticos de su tiempo a resolver el siguiente problema[18]:

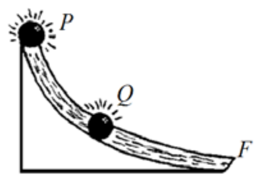
> "Sean P y Q dos puntos en un plano vertical. ¿Qué forma debe tener una rampa que una a P y Q para que un peso puntual que se deslice sin fricción sobre ella, bajo la acción de la gravedad, y que partiendo de P con velocidad cero, llegue a Q en el menor tiempo posible?"

Este es un buen acertijo, quienes lo resolvieron (Leibnitz, Tschirnhaus, Newton y Jacobo Bernoulli, hermano de Johann), sentaron con ello las bases del **cálculo de variaciones**.

La trayectoria de descenso más rápida, llamada braquistócrona por Bernoulli, corresponde a un arco de cicloide[19] invertida. Para resaltar la situación paradójica, la canica hará menos tiempo en ir de M a N por la curva señalada (¡no importa que baje y luego tenga que subir!), que si lo hace por el segmento rectilíneo.



La trayectoria descrita, tiene también la particularidad de ser una curva tautócrona (igual-tiempo), esto significa que las canicas P y Q emplearán el mismo tiempo en descender hasta F con independencia de la posición en que se encuentran.



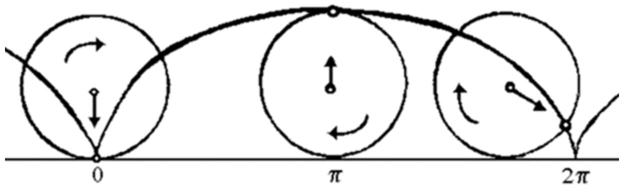
De la página 10

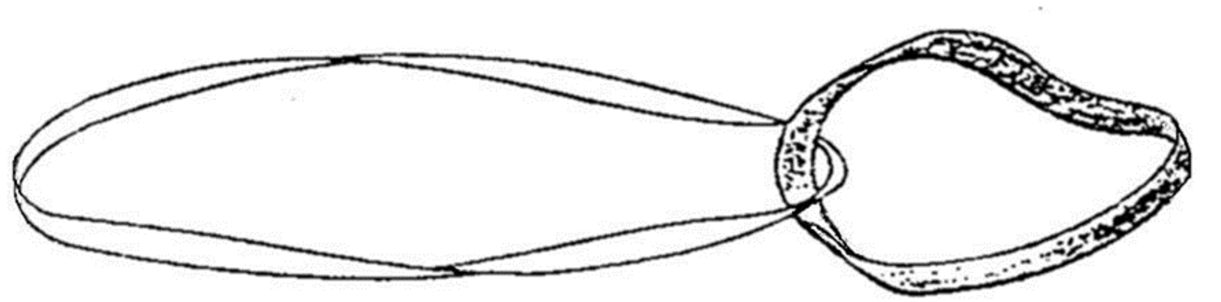
Seguro que ya descubriste que al partirla por la mitad, la banda resultante no es de Möbius y la mayor sorpresa que tuviste fue al cortarla a un tercio del borde, ya que se obtiene una banda de Möbius (idéntica a la original, pero más delgada) encadenada a una segunda banda, del doble de largo, que es idéntica (sí, pero un poco más delgada) a la que hubiera resultado de cortar a la banda original por la mitad.

---

[18] RIVAUD MORAYTA, JUAN JOSÉ. *Acerca del cálculo diferencial e integral*. CINVESTAV-IPN. México. 1987.

[19] La cicloide es la trayectoria que sigue un punto de la circunferencia cuando ésta rueda sobre un plano.





Ahora, sin romper las trata de acomodarlas formando una banda de Möbius del triple de grueso (y claro, de un tercio de ancho) que la original[20] ¡Sí se puede!

La matriz que se presentó contiene, en cada casilla, a la suma de los números que aparecen aquí en el renglón y columnas respectivas. No es necesario que dichos números sean los mismos para las columnas y para los renglones. El truco funciona sin importar cuáles números sean, ni el orden en el que se coloquen.

Las instrucciones obligan a tomar, en este caso, cinco casillas, pero éstas siempre quedan acomodadas de tal manera que hay una para cada renglón y cada columna.

	2	**1**	**3**	**0**	**4**
0					
1					
3					
2					
4					

Así, al sumar los contenidos de las casillas obtenidas, lo que tendremos será la suma de todos los números con los que se generaron los resultados de las casillas. En este caso la suma es veinte.

Las dos propiedades que están logrando que el truco funcione son la **asociatividad** y la **conmutatividad** de la suma. Ello quiere decir que el truco también funcionará con cualquiera otra operación que tenga ambas propiedades. Prueba con la multiplicación. Es decir, hay que cambiar la palabra *multiplica* por la palabra *suma*; tanto para generar los resultados de las casillas como en la instrucción del inciso e.

VEAMOS AHORA LAS SOLUCIONES DE LOS ÚLTIMOS ACERTIJOS.

1) Aunque no lo creas, hay muchas personas a las que se les dificulta resolverlo sin utilizar álgebra. Sin embargo, no es tan difícil si seguimos este razonamiento:

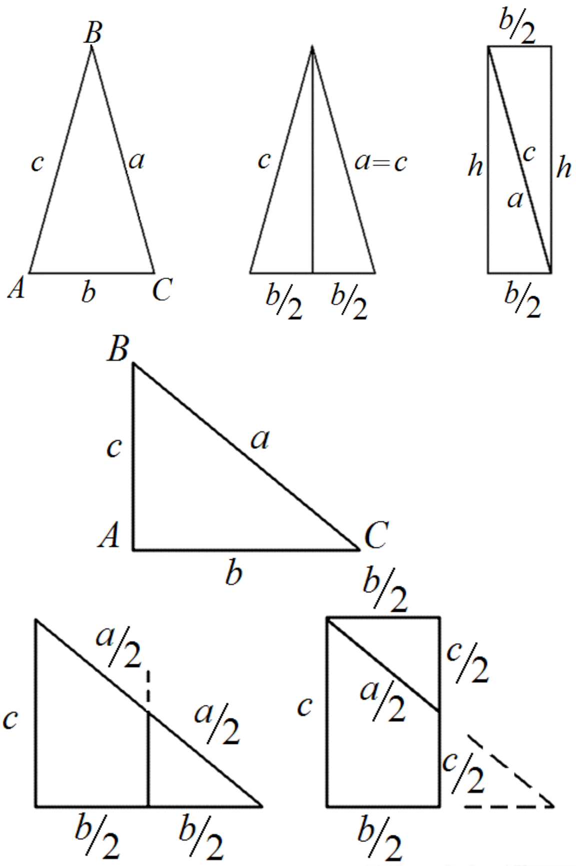
Supongamos que todos y cada uno de los ladrones va tomando una pieza de manera ordenada. En el momento en el que cada uno haya tomado seis piezas, sobrarán cinco piezas. Para que todos tengan siete piezas faltarán ocho piezas más; ello indica que son 13 ladrones (5 piezas que hay disponibles, más ocho piezas que faltarían).

La cantidad total de piezas robadas son 6 x 13 + 5 (seis piezas por cada uno de los trece ladrones, y cinco que aún hay disponibles), es decir 83.

2) Este es uno de los casos donde se pueden ejemplificar algunas de las estrategias heurísticas más comunes. Primero se resuelve un problema más sencillo (aquí, un triángulo isósceles y un triángulo rectángulo) y después se aplican los conocimientos obtenidos para resolver el problema que se planteó originalmente.

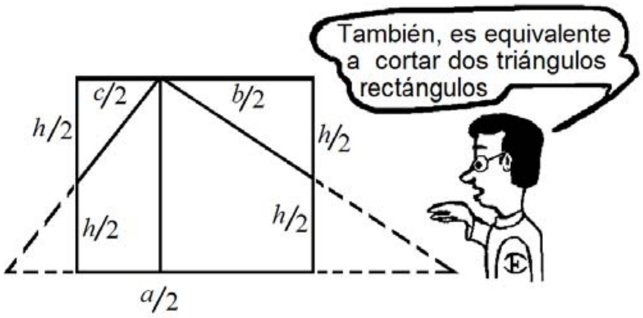
La solución es sencilla cuando se trata de un triángulo isósceles, basta con hacer un corte siguiendo la altura del lado desigual y colocar una pieza junto a la otra uniendo los lados iguales ($a=c$).

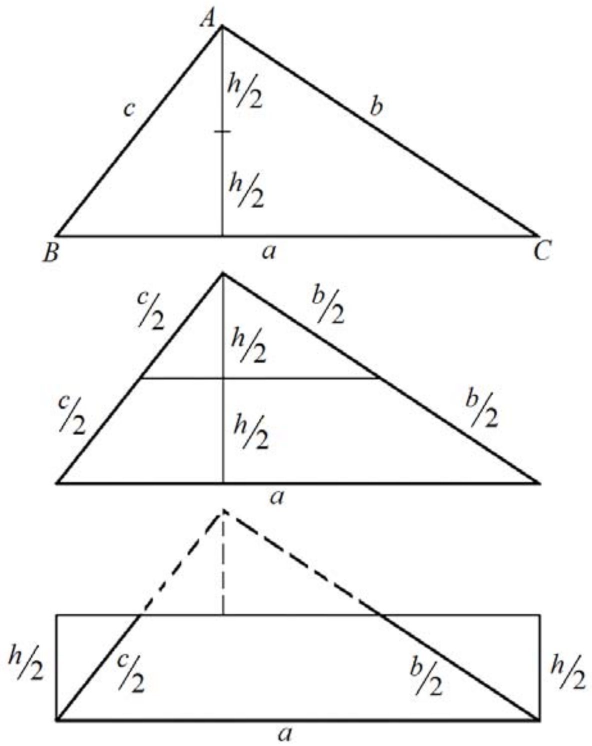
[20] GARDNER, MARTÍN. *Miscelánea matemática*. Biblioteca científica Salvat. Barcelona, España. 1986.



Si se trata de un triángulo rectángulo, también sería suficiente un corte, sólo que habría de hacerse siguiendo a la mediatriz (la mediatriz de un segmento es la perpendicular que pasa por el punto medio del segmento) de un cateto cualquiera y unir las piezas resultantes por los lados que pertenecían a la hipotenusa.

Pero el problema estaba planteado de una manera general, es decir el triángulo podría ser de cualquier tipo. En este caso, se levanta la altura del lado mayor, y a la mitad de ella se corta el triángulo con una perpendicular, posteriormente habrá de hacerse un corte más, siguiendo a la mitad superior de esa altura. Las dos piezas superiores se colocan sobre las partes que correspondían a sus respectivos lados.





3) Mucha gente empieza a resolver lo de inmediato, sin recapacitar sobre el asunto. Posteriormente se pierden entre tantas operaciones por no haber elegido una buena notación. Sin embargo, aquí da muy buenos resultados pensar en lo que pasaría si ya estuviera resuelto el problema.

Efectivamente, en la situación final quedan tantas canicas en cada saco, como las que había al principio. Ello significa que en el saco blanco, por cada canica roja que haya, ésta sustituye a una canica blanca... ¡La cual tiene que estar en el otro saco! Por tanto, hay la misma cantidad de canicas rojas en el saco blanco, como canicas blancas haya en el saco rojo.

4) Examinemos los elementos de este problema:

- Por cada naranja que se logre pasar por cada puerta, habrá que pagar por ella. Ello significa que entre menos naranjas se saquen, menos cantidad habrá que cortar. Pero la intención es comerse una,

¿alguien dijo que habría de comerse la naranja afuera? ¡No, ello no es una condición! Entonces conviene que la naranja sea comida adentro, así no se pagará por sacarla.

- Para poder salir, es necesario pagar algo, al menos media naranja (y sin partir). Entonces, además de la que debe comerse adentro del huerto, hay que cortar otras más.
- Como no se permite partir a las naranjas, para pagar la "media naranja más", la única posibilidad es que en cada puerta se pase con una cantidad impar de ellas.
- Se cortarán menos naranjas, si al salir por la última puerta se pasa ésta con sólo una naranja, la cual habrá de darse en pago al vigilante: la mitad de las que se pasen (la mitad de una), y media naranja más; es decir, en total una naranja.

¡Aquí está la clave para resolverlo! Resolverlo a partir de la situación final que queremos. Si al pasar por la última puerta debe llevarse una naranja, ¿cuál es el mínimo de naranjas (x) que habrán de pasarse por la puerta intermedia?

Lo que se pagará por ellas, en dicha puerta, será:

$x/2 + 1/2 =$ la mitad de las naranjas, más media naranja

Así, después del pago quedarán $x - (x/2 + 1/2)$, pero ello debe ser igual a 1, lo que da:

$x - (x/2 + 1/2) = 1$, de donde $x = 3$

Ahora ya sabemos que es necesario disponer al menos de tres naranjas al pasar por la puerta intermedia.

Con un razonamiento similar, es factible calcular el mínimo de naranjas (y) que habrán de pasarse por la puerta interior para que, después de pagarle a su vigilante la mitad de ellas, y media naranja más, esto es $(y/2 + 1/2)$, sobren tres. Así, $y - (y/2 + 1/2) = 3$, de donde $y = 7$

El problema ya está casi terminado. Sabemos que siete naranjas se van a usar en pagos, pero también hay que comerse una, pero adentro, lo que da un total de ocho naranjas que deben cortarse.

Si hubieras decidido comer tu naranja después de salir por la puerta interior, pero antes de pasar la intermedia, se necesitan cortar 9 naranjas.

Si la decisión es comérsela después de salir por la puerta intermedia, pero antes de pasar por la puerta de salida, se necesitan cortar 11 naranjas.

Si lo que se quiere es comérsela afuera del huerto, se necesitan cortar 15 naranjas.

¡Es claro que la cantidad mínima a cortar es 8 naranjas, a condición de comerse adentro la que pide el problema.

Este problema es de gran utilidad para practicar la generalización. ¿Cuál sería el resultado si hubiesen n puertas (con sus vigilantes) por las que habría sido necesario pasar si:

a) Se mantiene la misma condición de pago.

b) Si cada vigilante pide de acuerdo a su número de puerta de la siguiente manera: el de la puerta i pide la $(i+1)$-ésima parte de las naranjas que traes al pasar y un $(i+1)$-ésimo de naranja más.

5) La única dificultad extra, quizá se encuentre en hacer el diagrama donde se ubiquen las posibilidades, pues se trata de una matriz un poco más grande que la usada en el problema de la página 5. Pero una vez dibujada dicha matriz, es cosa de paciencia para llegar a la solución aplicando el método ya descrito allí. En la siguiente página puedes ver la respuesta.

6) Esta es la solución que da el autor del acertijo:

Inquilino	Ubicación	Color	Número
Sr. Sanz	Dormitorio	Gris	1023
Srita. Carmen	Sala	Verde	5320
Srita. Adela	Pasillo	Negro	3210
Sra. Rius	Estudio	Azul	4321
Sr. Garzón	Cocina	Rojo	2301

a) Los únicos días que el León puede decir “Ayer mentí” son los lunes y jueves. Los únicos días que el Unicornio puede decir “Ayer mentí” son los jueves y domingos. Por lo tanto, el único día en el que ambos pueden decir esto es el jueves.

b) El primer enunciado del león implica que es lunes o jueves. El segundo enunciado implica que no es jueves. Por lo tanto es lunes.

c) ¡En ningún día de la semana es esto posible! Solamente podría hacer el primer enunciado los lunes y los jueves; solamente podría hacer el segundo los miércoles y los domingos. Así pues, no hay ningún día en el que el León pueda hacer ambos enunciados.

d) ¡Esta es una situación muy diferente! Ilustra estupendamente la diferencia entre hacer dos enunciados separadamente y hacer un enunciado que sea la conjunción de los dos. En efecto, dados cualesquiera dos enunciados X e Y, si el enunciado “X e Y” es verdadero, entonces se sigue, desde luego, que X e Y son verdaderos separadamente; pero si la conjunción “X e Y” es falsa, entonces solamente se sigue que al menos uno de ellos es falso.

Ahora bien, el único día de la semana en el que podría ser verdadero que el León mintió ayer y que mentirá mañana de nuevo es el martes (es éste el único día que hay entre dos de los días en los que al León le toca mentir). Así, el día en que el León dijo esto no podría ser martes, pues los martes ese enunciado es verdadero, pero el León no hace enunciados verdaderos los martes. Por lo tanto no es martes, pues el enunciado del León sería falso, ya que el León está mintiendo. Por lo tanto el día tiene que ser o lunes o miércoles.

7) Según el problema hay dos pares de hermanos: Carolina y Juan, y, Margarita y Pedro; y uno de dichos pares está formado por gemelos (es claro que quienes son los gemelos no son univitelinos).

Uno de los gemelos comió la mayor porción y el otro no comió la menor. Además quienes comieron la mayor y la menor porciones son del mismo sexo. Esto es Juan y su hijo Pedro; o, Carolina y Margarita (no necesariamente en ese orden).

Pero quienes comieron la mayor y la menor porciones tienen la misma edad, concluimos que no pueden ser Juan y su hijo, por lo que deben ser Carolina y su sobrina (¡hay tres personas que tienen la misma edad!).

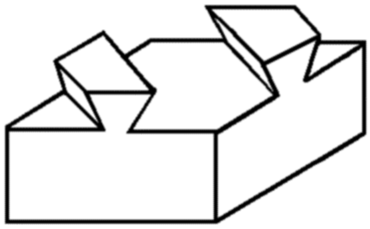
Con lo anterior concluimos que:

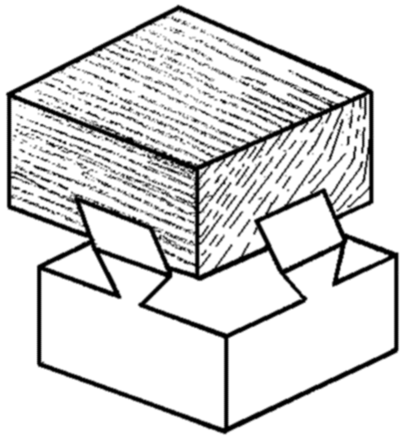
- Los gemelos son Margarita y Pedro, y que uno de ellos comió la mayor porción.

- Carolina y Margarita comieron la menor y la mayor porción y por la conclusión anterior, quien comió la mayor porción fue Margarita.

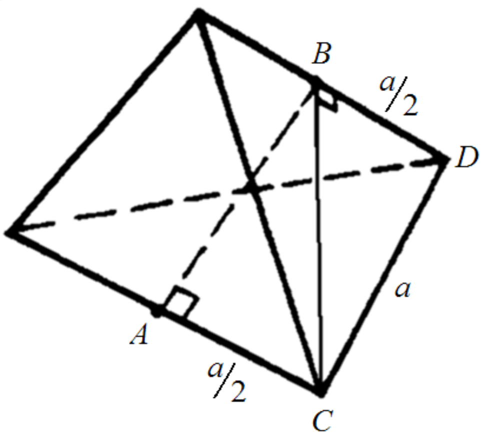
Así: Margarita comió 1/3 de pastel; Carolina comió 1/6 de pastel; Juan y su hijo Pedro comieron 1/4 de pastel.

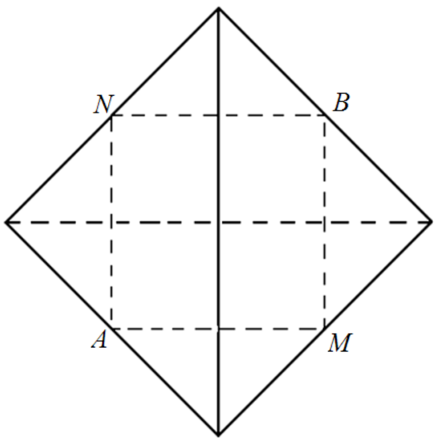
8) No siempre es fácil llegar a la solución, en mi caso después de mucho pensarle... ¡tomé el cubo y lo empecé a mover fuertemente!, después de muchos intentos con la “fuerza bruta”, descubrí el truco. Las figuras muestran la solución. El cubo se desliza diagonalmente.





9) El tetraedro regular es un cuerpo formado por cuatro caras triangulares (triángulos equiláteros). Podemos suponer que está dada la magnitud de la arista (todas son iguales), llamémosle a a dicha magnitud.





Es fácil resolver el problema si se aplica dos veces el teorema de Pitágoras; la primera vez para calcular el cateto BC; la segunda para calcular el cateto AB, que es lo pedido.

Sin embargo, existe una solución más sencilla y elegante: Al tomar los puntos medios de dos pares de aristas, pares opuestas entre sí, dichos puntos son los vértices[21] de un cuadrado de lado $a/2$. La distancia pedida coincide con la diagonal de este cuadrado:

$$AB = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

10) si todas las camisas son blancas, excepto dos, entonces entre azules y amarillas sólo hay dos, una de cada una. Repitiendo el mismo razonamiento para las azules y las amarillas, concluimos que tiene una de cada color, por lo tanto habrá tres camisas. Lo anterior, explicado con el apoyo del álgebra es:

$t =$ total de camisas.

$x =$ número de camisas blancas.

$y =$ número de camisas azules.

$z =$ número de camisas amarillas.

Así, las condiciones del problema dan lugar a las ecuaciones:

$t - 2 = x \qquad t - 2 = y \qquad t - 2 = z$

[21] Este resultado ya se usó en la página 4.

Como en las tres ecuaciones el primer término es el mismo, concluimos que $x = y = z$ (hay la misma cantidad de camisas blancas que de azules y que de amarillas).

Por otra parte, estamos suponiendo que solamente se tienen camisas de esos colores (condición que no está dada en el problema), el total de camisas será $t = x + y + z$, o lo que es lo mismo $t = 3x$. Pero de la primera ecuación, sabemos que $t = x + 2$. Al igualar los segundos términos de estas dos últimas igualdades obtenemos $t = 3$, y $x = 1$ (por tanto $y = z = 1$).

Es muy importante buscar la simplicidad, pero también conviene ser suspicaz. En este caso, la solución supuso algo que no aseguraba el problema: "solamente hay camisas blancas, azules y amarillas". Si aceptamos la posibilidad de que existan camisas de otros colores (lo que no se niega en el enunciado del problema), hará falta una incógnita más:

$w =$ número de camisas de color distinto al de las anteriores.

Con las tres primeras ecuaciones, que son las referentes a las condiciones del problema, se obtiene, como ya lo hablamos hecho, que $x = y = z$. Sin embargo, el total de camisas es $t = x + y + z + w$, o lo que es lo mismo $t = 3\,x + w$, que al sustituirlo en la ecuación $t - 2 = x$ nos da una igualdad donde sólo aparecen dos incógnitas: $3\,x + w - 2 = x$.

De esta última igualdad, al despejar a w, podremos obtener todas las posibles soluciones de valores enteros no negativos para: $w = 2 - 2\,x$.

Así, $x = 1;\ y = 1;\ z = 1;\ w = 0$, que habíamos encontrado ya.

O bien, $x = 0;\ y = 0;\ z = 0;\ w = 2$, que es otra solución.

Esta última solución tiene una interpretación que a muchos les parece sumamente sofisticada: "Sólo tengo dos camisas, ninguna de las dos es completamente blanca, ni azul ni amarilla". Por ejemplo una lila y otra naranja. Todas, excepto dos (la lila y la naranja), es decir cero, son blancas; todas, excepto dos (las mismas que hablamos dicho, la lila y la naranja), es decir cero, son azules; todas, excepto dos (¿ya adivinaron cuáles?), es decir cero, son amarillas.

11) Debido a que cada uno de los González saluda a cada uno de los Martínez, el total de saludos (independientemente de que sean besos o abrazos) será igual al producto del número de miembros de una familia por el de la otra; y como el total de saludos es 77 (42 besos y 35 abrazos), el problema se reduce a encontrar dos números que multiplicados den 77. Los únicos pares de números cuyo producto es 77 son: 77 con 1, y 7 con 11.

La primera posibilidad (77 miembros en una familia y uno en la otra), nos indica que el único miembro del que consta una familia debe ser hombre (de lo contrario no habrían abrazos), y en la otra familia habrían 42 mujeres y 35 hombres.

Para la segunda posibilidad (11 miembros en una familia y 7 en la otra), tenemos que el producto del número de varones de una familia por el de la otra debe ser igual a 35 (número de abrazos), que puede descomponerse en 5 x 7, y en 35 x 1 el último caso no es compatible con los datos de la segunda posibilidad que manejamos, ya que en ninguna de las familias hay tantas personas.

Así pues, en una familia hay 5 varones y en la otra 7, que a su vez, al calcular el número de mujeres nos produce dos soluciones más. De esta manera concluimos que el problema tiene tres soluciones:

	Familia numerosa		Familia pequeña (vive mejor)	
	varones	mujeres	varones	mujeres
1a solución	35	42	1	0
2a solución	5	6	7	0
3a solución	7	4	5	2

12) Si decidimos emplear el álgebra para resolver este problema, debemos simbolizar cada uno de los elementos, y las relaciones que se presentan en el enunciado. Así, por una parte están los objetos (billetes y monedas):

$P =$ Número de pesos que tenía al entrar a la tienda.

$C =$ Número de centavos que tenía al entrar a la tienda.

Por otra parte, las cantidades de dinero que representan dichos objetos:

$P =$ Cantidad de dinero que tenía **con los pesos** al entrar a la tienda.

$C/100 =$ Cantidad de dinero que tenía **con los centavos** al entrar a la tienda. (¡Hay que tiempos aquellos...! un centavo es la centésima parte de un peso y aunque lo dudes, se podían comprar cosas con ellos.)

Teniendo muy clara la separación entre el número (y tipo) de objetos y las unidades monetarias que representan tales objetos, se continúa la simbolización:

$P + C/100 =$ cantidad de dinero con la cual entró a la tienda.

Como gastó las tres cuartas partes, le quedó la cuarta parte de dinero

(A)................ $\frac{P + C/100}{4} =$ Cantidad de dinero con la que salió de la tienda.

$C/4 =$ Número de pesos que tenía al salir de la tienda.

$P =$ Número de centavos que tenía al salir de la tienda.

$C/4 =$ Cantidad de dinero que tenía con los pesos al salir de la tienda.

$P/100 =$ Cantidad de dinero que tenía con los centavos al salir de la tienda.

(B)................$C/4 + P/100 =$ Cantidad de dinero que tenía al salir de la tienda.

Como las expresiones A y B representan a la misma cantidad, podemos igualarlas. Así,

$\frac{P + C/100}{4} = C/4 + P/100$, de esta ecuación se concluye que

$32\,P = 33\,C$, pero sabemos que $0 \le C \le 99$, ya que 100 centavos harían otro peso.

De la última igualdad se sabe que P es múltiplo de 33 (P=$33k$), y que C es múltiplo de 32 (C=$32k$). Donde k es el mismo número en ambos casos, de otra manera no se conservar1a la igualdad. Además, hay de 0 a 99 centavos, esto es $0 \le 32k \le 99$. Así, k sólo puede tomar los valores 0, 1, 2 y 3. Cada uno de estos cuatro valores genera una solución:

	Valores para			Dinero al	Dinero	Dinero al
	k	p	C	entrar	gastado	salir
1a. solución	0	0	0	$ 0.00	$ 0.00	$ 0.00
2a. solución	1	33	32	$33.32	$24.99	$ 8.33
3a. solución	2	66	64	$66.64	$49.98	$16.66
4a. solución	3	99	96	$99.96	$74.97	$24.99

Por ahora eso es todo, pero con la finalidad de mejorar este material, te agradeceremos opiniones y comentarios al respecto. Puedes enviarlos a:

Elias_Loyola@hotmail.com

eloyola@mexico.com

Ilustraciones: Elías Loyola Campos y Gloria Mariana Loyola Robledo.

Primera edición: 1991

Segunda edición: 1992

Tercera edición: 2005