- Matemáticas Para la Administración y la Economía
- Precalculo

Funciones

- Cuando un elemento del punto Y se encuentra reflejado en X
- La parábola no es una función ya que se refleja en dos puntos

Relaciones

Sean los conjuntos A y B con $a \in A \wedge b \in B \Rightarrow \exists$ producto cruz AxB donde cada elemento de A está en B

$(AxB) \in AxB$

#A=N; #B=M => #A * #B = N*M

Ej.- Sea A={1,2,3} ^ B={4,5,6}

#A=3 ^ #B=3; #A * #B = 9, par ordenado

AxB={(1,4),(1,5),(1,5),(2.1),(2,5),(2,6),(3,4),(3,5),(3,6)}

cardinalidad = nº de productos que tiene cada conjunto

Debe ∃ una relación entre a y b

(aRb) => R ∴ R ⊆ AxB

Tipos de Números

|N : Naturales (1…∞)

$|N_0$: Naturales con cero (1…∞)
Z
Q : fraccionario, racionales
Q^0: fraccionarios irracionales (∞)
C : complejos
R : reales

Una relación siempre es una condición
Sea R la relación entre A y B, donde; A={1,2,3,4} ; B={1,3,5} definido por "x<Y"
AxB={(1,1),(1,3),(1,5),(2,1),(2,3),(2,5),(3,1),(3,3),(3,5),(4,1),(4,3),(4,5)}

ARB={(1,3),(1,5),(2,3),(2,5),(3,5)(4,5)}

Dom R = {1,2,3,4} elementos $\in$ a X

Rec R = {3,5} elementos $\in$ a Y

R^{-1} = {(b,a),(a,b) $\in$ R}
R^{-1} = {(3,1),(5,1),(3,2),(5,2),(5,3),(5,4)}
Dom R^{-1} = {3,5}
Rec R^{-1} = {1,2,3,4}

Sea R relación x,y
R={(x,y) / y $\geq x^2$}
S={(x,y) / y < x+2}
Encuentre: a) R ∩ S

b) Dom (R ∩ S)

c) Rec (R ∩ S)

d) Grafique

Toda relación con exponente al cuadrado es una parábola (y $\geq x^2$)
Toda relación donde una variable mas una constante es una recta (y < x+2)

$$Y = x^2$$
$$Y = x + 2$$
$$x^2 = x + 2$$
$$x^2 - x - 2 = 0$$

⇨ se cumple la condición de un cuadrado de polinomio

⇨ $ax^2 + bx + c = 0$

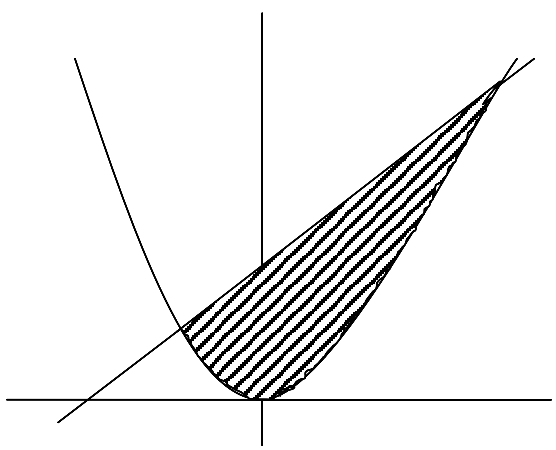
⇨ $x = \dfrac{-b + -\sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$

⇨ $(x+1)(x-2) = 0; x = -1 \wedge x = 2$

⇨ $y = x + 2$

⇨ $y = -1 + 2; y = 2 + 2$

⇨ $y = 1; y = 4$



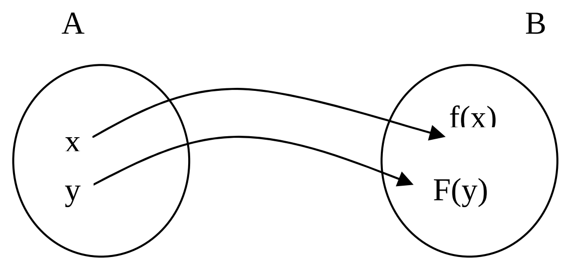
Dom (R ∩ S) = [-1,2]

Rec (R ∩ S) = [0,4]

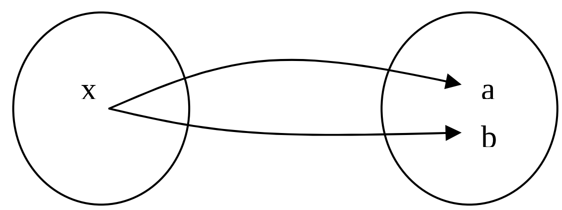
Definición de Función

Dado la relación $f : A \rightarrow B$, esta relación es función ⇔ cada elemento de A tiene imagen en B.

F:A->B



Función



No es Función

Dom F=A

f(x)=a ∧ f(y)=b => a=b

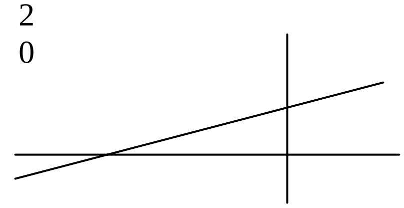
Ecuaciones de rectas y Curvas

Ax+by+c=0	Recta
$Y=x^2$	Parábola
$X^2+y^2=r^2$	Circunferencia
$(x^2/a^2)+(y^2/b^2)=1$	Elipse
$(x^2/a^2)-(y^2/b^2)=1$	Hipérbola
$Y=x^3$	Cúbica

Ej. Sea x+5xy-4y+8=0; encuentre Dom y Rec

- ⇨ x+5xy-4y+8=0 para x tenemos
  - x(1+5y)=4y-8
  - x=(4y-8)/(1+5y)

x	y
0	2
-8	0



- ⇨ x+5xy-4y+8=0 para y tenemos
  - y(5x-4)=-x-8
  - y=(-x-8)/(5x-4)

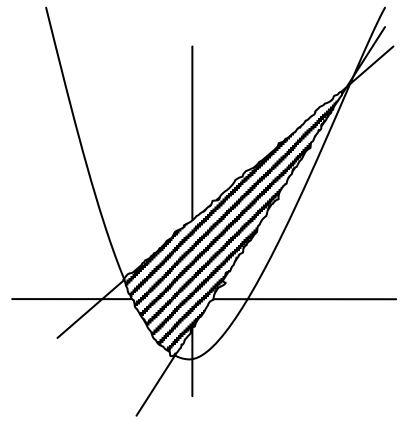
Dom ={-8,0}
Rec={0,2}

Ej. El costo por pie^2 para construir una casa es de U$110, exprese el costo C como función de x es el nº de pies^2, cual es el costo de construcción para una casa de 2.000 pies^2.

Costo pie =U$110
F(x)=c
F©=110*2000
= U$220.000
ea f(x)=R->|R donde

F(x)= {3x-1 si x>3
{x^2-2 si -2 ≤ x ≤ 3
{2x+3 si x<-2

a) graficar
b) hallar
   a. f(2)=2
   b. f(4)=11
   c. f(-1)=-1
   d. f(3-)=-3



- Función Inyectiva (1 a 1): Una función inyectiva de A->B se dice 1:1 ⬄ elementos de A tienen imágenes en B.
- Función Epiyectiva: una función de A->B se dice sobre ⬄ todo elemento de B es imagen de algún elemento de A.
- Función Biyectiva: una función es biyectiva si se cumple con las dos condiciones anteriores
- Función Inversa: una función es inversa ⬄ es biyeciva.

Ej. Sea F:R->|R def por

$$F(x) = \frac{(3x+4)}{(x-2)}$$

Demostrar que es biyectiva

a) inyectiva?: f(a)=f(b)=> a=b

=> $F(x_1) = \frac{3x_1+4}{x_1-2}$ $\qquad$ $F(x_2) = \frac{3x_2+4}{x_2-2}$

$$\frac{3x_1+4}{x_1-2} = \frac{3x_2+4}{x_2-2}$$

$$(3x_1+4)(x_2-2) = (3x_2+4)(x_1-2)$$

$$3\cancel{x_1}x_2 - 6x_1 + 4\cancel{x_2} - \cancel{8} = 3\cancel{x_2}x_1 - 6x_2 + 4\cancel{x_1} - \cancel{8}$$

$-6x_1 = -6x_2$ => Inyectiva

b) Epiyectiva?: f(x)=y

=> $Y = \frac{3x+4}{x-2}$

$$y(x-2) = (3x+4)$$

$$yx-2x=3x+4$$
$$yx-3x=2y+4$$
$$x(y-3)=(2y+4)$$
$$x=\frac{(2y+4)}{(y-3)}$$ todos los reales menos 1/3

=> reemplazar x en función $\frac{(3x+4)}{(x-2)}$

$$f(x)=\frac{3\left(\frac{2y+4}{y-3}\right)+4}{\left(\frac{2y+4}{y-3}\right)-2}=\frac{\frac{3(2y+4)+4(y-3)}{(y-3)}}{\frac{(2y+4)-2(y-3)}{(y-3)}}=\left(\frac{6y+12+4y-12}{(y-3)}\right)*\left(\frac{(y-3)}{2y+4-2y+6}\right)$$

$$f(x)=\frac{10y}{10}\Rightarrow f(x)=y$$ Epiyectiva

$$\therefore f^{-1}(x)=\frac{(2x+4)}{(x-3)}$$ $\Leftrightarrow$ Biyectiva

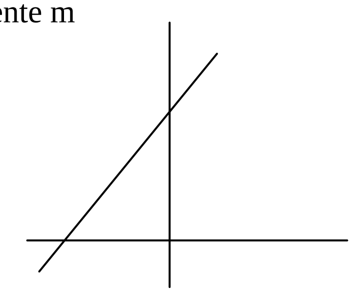
La Recta

Sea $ax+by+c=0$ la ecuación general de la recta

$$\Rightarrow ax+by=c$$

$$by=\frac{-ax}{b}-\frac{c}{b}$$ $\therefore$ sean $m=\frac{-a}{b}$ $n=\frac{-c}{b}$

=> y=mx+n Ec. Principal de la recta con pendiente m



M= coeficiente de y
M>0 recta sube (oferta)
M<0 recta baja (demanda)

Ej. Graficar la ecuación y=3x+4

M= diferencia entre dos puntos

$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad tg\Theta=\frac{y}{x} \qquad m=\frac{(y_2-y_1)}{(x_2-x_1)}$$

Por un punto pasan infinitas rectas
Dos puntos se unen por una recta

Ecuación Punto Pendiente

$$(y-y_1)=\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)(x-x_1) \qquad (y-y_1)=m(x-x_1) \qquad y=m(x-x_x)+y_1$$

Obtener la ecuación de la recta que pasa por los puntos A(3,4) y B(-5,2), además encontrar el ángulo de inclinación de la ecuación principal.

$m=\left(\dfrac{y-y_1}{x-x_1}\right)$ $\qquad m=\dfrac{2-4}{-5-3}=\dfrac{-2}{-8}=\dfrac{1}{4}$ $\qquad$ pendiente

$y-y_1=m(x-x_1)$ $\qquad y-4=\dfrac{1}{4}(x-3)$ $\qquad 4(y-4)=(x-3)$ $\qquad 4y-16-x+3=0$

$x-4y+13=0$ $\qquad$ Ecuación de la recta

$tg\Theta=\dfrac{1}{4}$ $\qquad Y=\dfrac{x+13}{4}=\dfrac{1}{4}(x+13)$

$\Theta=tg^{-1}\dfrac{1}{4}$

Rectas // ⇔ $m_1=m_2$

Rectas $\perp$ ⇔ $m_1*m_2=1$

Se venden 10 relojes cuando su precio es de U$80 y 20 relojes cuando el precio es U$60. Cual es la ecuación de la demanda.

$P_1(10,80)$ y $P_2(20,60)$

- ⇨ $y-y_1=m(x-x_1)$
- ⇨ 60-80=m(20-10)
- ⇨ -20=10m
- ⇨ m=-2 pendiente
- ⇨ y=mx+n
- ⇨ 80=-2*10+n
- ⇨ 80+20=n
- ⇨ n=100

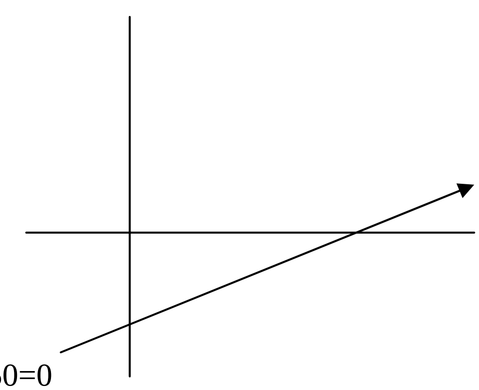
Ej. Cuando el precio de cierto tipo de cámara fotográfica es U$500 se ofrecen 50 de ellas en el mercado; si el precio es de U$750 hay una disponibilidad de 100 cámaras. Cual es la ec de la oferta

$P_1(50,500)$ y $P_2(100,750)$

$m=\left(\dfrac{y-y_1}{x-x_1}\right)$ $\qquad M=\dfrac{750-500}{100-50}=\dfrac{250}{50}=50$

$y=mx-n$ $\qquad 500=5*50-2$

$n=250-500=-250$



y=mx+c => $y-y_1=m(x-x_1)$

y-500=5(x-50)

y-500=5x-250

y-500-5x+250=0 => y-5x-250=0

∴ y=5x-250

La Parábola

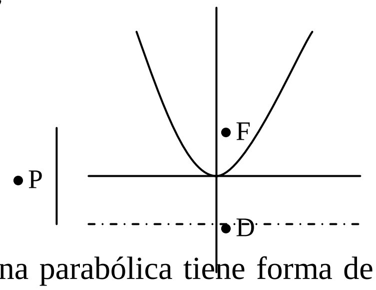
Se define como el conjunto de todos los puntos P en el plano que están en la misma distancia de un punto fijo y de una recta fija.

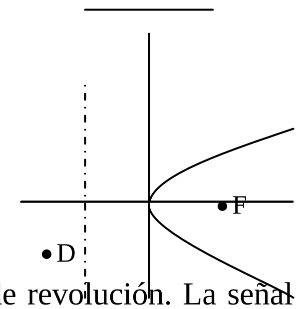
Punto fijo=foco

• P

Ecuación=directriz

$y^2 = 4py$





Una antena parabólica tiene forma de romboide de revolución. La señal que emana desde un satélite llega a la superficie de la antena y son reflejadas a un solo punto, donde está colocado el receptor. Si el disco de la antena mide 8 pies de diámetro en su abertura y 3 pies de profundidad en su centro. En que posición debe estar alojado el receptor (F).

Y^2=4py => 4^2=4p3

16=12p

16/12=p

4/3=p => foco (4/3,0)

Sistema de Ecuaciones

Métodos

- Reducción

Sea el sistema

$$\begin{aligned} 5x+10y&=20 \quad *-4\\ 3x+4y&=10 \quad *10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 20x-40y&=80\\ 30x+40y&=100\\ 10x&=20 \qquad x=2 \end{aligned}$$

$$5*2+10y=20$$

$$10y=20-10$$

$$y=\frac{10}{10}=1$$

- Sustitución

Sea el mismo sistema anterior

$$\begin{aligned} 5x+10y&=20\\ 3x+4y&=10 \end{aligned}$$

$$5x=20-10y \qquad x=\frac{20-10y}{5}=4-2y$$

Reemplazando

$$3(4-2y)+4y=10 \qquad 12-6y+4y=10 \qquad -2y=10-12 \qquad y=\frac{-2}{-2}=1$$

- Igualación

Sea el mismo sistema anterior

$$5x+10y=20$$
$$3x+4y=10$$

$$5x=20-10y \qquad x=\frac{20-10y}{5}=4-2y$$

$$3x+4y=10 \qquad x=\frac{10-4y}{3}$$

$$4-2y=\frac{10-4y}{3}$$
$$3(4-2y)=10-4y$$
$$12-6y=10-4y$$
$$12-6y-10+4y=0$$
$$2-2y=0$$
$$y=\frac{-2}{-2}=1$$

Ejemplo

$$3x-5y=25 \qquad *2$$
$$-6x+10y=-50$$
$$\cancel{6x}-\cancel{10y}=\cancel{50}$$
$$-\cancel{6x}+\cancel{10y}=-\cancel{50}$$

Rectas // no hay solución

Ejem.

$$x+5y=6 \qquad *\text{-}5$$
$$5x+6y=11$$
$$-\cancel{5x}-25y=-30$$
$$\cancel{5x}+6y=11$$
$$-19y=-19 \qquad x+5*1=6$$
$$y=\frac{-19}{-19}=1 \qquad x=6-5 \qquad x=1$$

Regla de kramer

$$\Delta=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ab-bc$$

ej.1.- $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}=18-20=2$

ej. 2.- $\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}=18+20=38$

ej. 3.- $\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 5 & -6 \end{vmatrix}=-18+20=2$

ej

$$5x+10y=20$$

$$\underline{3x+4y=10}$$
$$a_1 x + b_1 y = c_1$$
$$a_2 x + b_2 y = c_2$$

$$\Delta p = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - b_1 a_2 \qquad \Delta x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1 b_2 - b_1 c_2 \qquad \Delta y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1 c_2 - c_1 a_2$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta p} = \frac{c_1 b_2 - b_1 c_2}{a_1 b_2 - b_1 a_2} \qquad y = \frac{\Delta y}{\Delta p} = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - b_1 a_2}$$

Aplicando en el ej.

$$\Delta p = \begin{vmatrix} 5 & 20 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 20 - 30 = -10$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 20 & 10 \\ 10 & 4 \end{vmatrix} = 80 - 100 = -20$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 5 & 20 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} = 50 - 60 = -10$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta p} = \frac{-20}{-10} = 2 \qquad y = \frac{\Delta y}{\Delta p} = \frac{-10}{-10} = 1$$

Ej. Dada la matriz de 3x3

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 1(45-48) - 2(36-42) + 3(32-35)$$

$$= 1(-3) - 2(-6) + 3(-3) = 3 - +12 - 9 = 0$$

Ej.

$$-2x - y = 3$$
$$-6x + 5y = -15$$

$$\Delta p = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -6 & 5 \end{vmatrix} = -10 - 6 = -16$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -15 & 5 \end{vmatrix} = 15 - 15 = 0$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -6 & -15 \end{vmatrix} = 30 + 18 = 48$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta p} = \frac{0}{-16} = 0 \qquad y = \frac{\Delta y}{\Delta p} = \frac{48}{-16} = -3$$

Regla de Ramus

$$\Delta\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{vmatrix} \quad \text{o} \quad \Delta\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}$$

$$= (aei + bfg + cdh) - (ceg + afh + bdi)$$

Ej.-

$$x + y + z = 2$$
$$x - 3y + 2z = 7$$
$$4x - 2y - z = 9$$

$$\Delta p = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & 1 & -3 \\ 4 & -2 & -1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = (3 + 8 - 2) - (-1 - 4 - 12) = 9 + 17 = 26$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 7 & -3 & 2 & 7 & -3 \\ 9 & -2 & -1 & 9 & -2 \end{vmatrix} = (6 + 18 - 14) - (-7 - 8 - 27) = 10 + 42 = 52$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & 2 & 1 & 7 \\ 4 & 9 & -1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = (-7 + 16 + 9) - (-2 + 18 + 28) = 18 - 44 = -26$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 7 & 1 & -3 \\ 4 & -2 & 9 & 4 & -2 \end{vmatrix} = (-27 + 28 - 4) - (9 - 14 - 24) = -3 + 29 = 26$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta p} = \frac{52}{26} = 2 \qquad y = \frac{\Delta y}{\Delta p} = \frac{-26}{26} = -1 \qquad z = \frac{\Delta z}{\Delta p} = \frac{26}{26} = 1$$

Programación Lineal

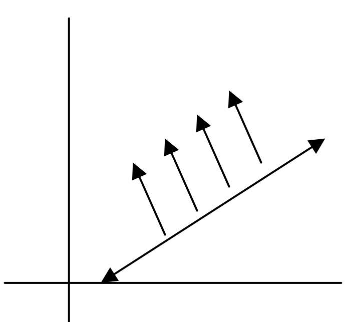
Se tiene

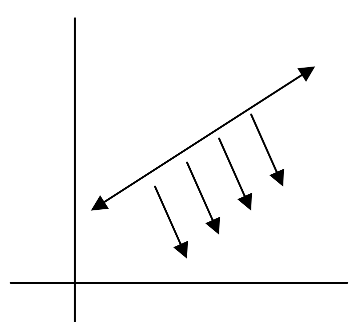
$\geq o \leq o =$ Línea Continua

$> o <$ Línea Discontinua

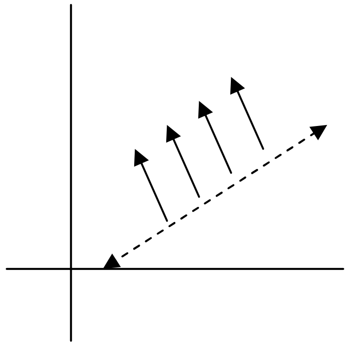
Se tiene

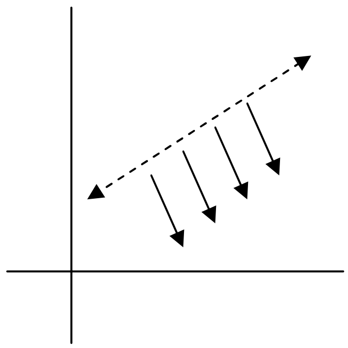
$y \geq mx + n$ $\qquad$ $y \leq mx + n$





$y > mx + n$ $y < mx + n$





$f(x, y) \geq 0$; $f(x, y) \leq 0$; $f(x, y) > 0$; $f(x, y) < 0$

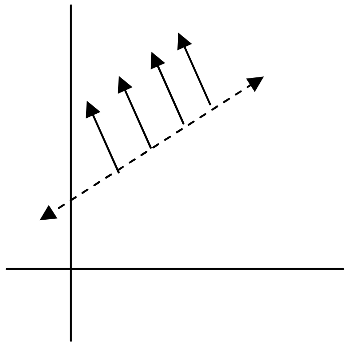
Teorema

Sea p un punto del semiplano en que la recta x, la ecuación F(x,y)=0 divide al plano. Si F(x,y)>0 en p, => F(x.y)>0 para todos los puntos que pertenecen al mismo semiplano de P.

Ej. Graficar el conjunto sol de la inecuación

$2x - y + 1 < 0$

x	**y**
0	1
½	0



Pto (2,1)

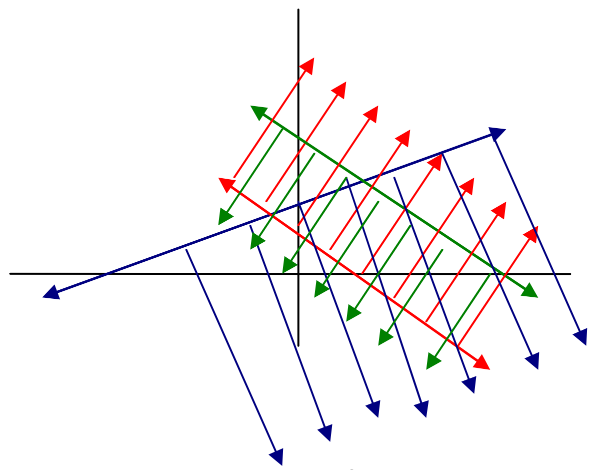
$2x - y + 1 < 0$

$4 - 1 + 1 < 0$ No cumple condición

$4 < 0$

Ej. Graficar el conjunto solución del siguiente sistema de ecuaciones

$2x + 5y - 1 \geq 0$
$x - 3y + 5 \geq 0$
$3x + 2y - 7 \leq$

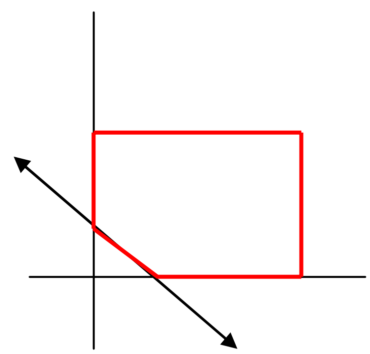


Determinar para que puntos (x,y) de la región dada la función F(x,y)=4x+3y es Max y para que valores em Min.

$1 - x - y \leq 0$
$0 \leq x \leq 4$
$0 \leq y \leq 3$
Asumiremos que $x \geq 0$ e $y \geq 0$
Para el punto (2,2) tenemos;

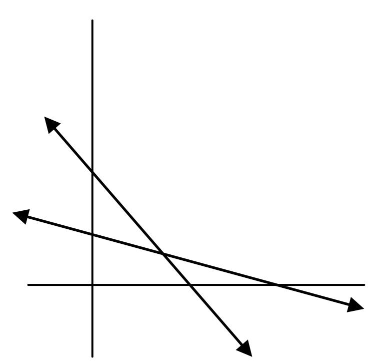
$$\left.\begin{array}{l} 1 - 2 - 1 \leq 0 \\ -3 \leq 0 \end{array}\right. \text{ cumple}$$

$F(x, y) = 4x + 3y$; tenemos
F(0,1)=3 Min
F(1,0)=4
F(4,0)=16
F(0,3)=9
F(4,3)=25 Max



En una plantación se ha detectado una enfermedad y para combatirla se necesita una mezcla que contenga como mínimo 15 partes de una sustancia A y 20 partes de una sustancia B. En el mercado solo se encuentran 2 productos que pueden ser usados mezclados uno tipo x que contiene partes de A y 5 partes de B y otro que cuesta 1.000 por litro. Otro que tiene y que contiene 5 partes de A y 2 partes de B y su valor es de 3.000 por litro. Que cantidad se debe mezclar de cada uno para satisfacer las necesidades con el costo mínimo.

$F(x, y) \geq 1000x + 3000y$
$x + 5y \geq 15$ *-5
$5x + 2y \geq 20$
$x \geq 0$
$y \geq 0$
$-5x - 25y \geq -75$
$5x + 2y \geq 20$



$$-23y \geq -55$$
$$y \geq \frac{-55}{-23} = \frac{55}{23}$$
=>
$$5x + 2\left(\frac{55}{23}\right) \geq 0$$
$$5x + \left(\frac{110}{23}\right) \geq 0$$
$$5x \geq \frac{110}{23}$$
$$x \geq \frac{110}{23} * \frac{1}{5}$$
$$x \geq \frac{25}{23}$$

$$F(x, y) = 1000x + 3000y$$
$$F(x, y) = 1000\left(\frac{25}{23}\right) + 3000\left(\frac{55}{23}\right)$$
$$F(x, y) = \frac{(25)1000 + (55)3000}{23}$$
$$F(x, y) = \frac{25000 + 165000}{23}$$
$$F(x, y) = \frac{190000}{23}$$

Álgebra de Matrices

Def.

Una matriz, es un arreglo rectangular de números reales, encerrado en grandes paréntesis rectangulares, por lo general los denotamos con letras mayúsculas, ej.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & -9 \end{bmatrix} \qquad \text{C}=\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 11 \\ 2 & 7 & 13 \\ 3 & 9 & 15 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

En general se tendrá

$$A_{m*n} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

Matriz Identidad

Se define como aquella matriz donde la diagonal siempre es uno.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz Nula

Se define como aquella matriz cuyos elementos son ceros

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Suma y Resta de Matrices

Sea:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \end{bmatrix};\ A + B = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & -1 \end{bmatrix};\ A - B = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -3 \\ 1 & 4 & 8 \\ -2 & -4 & 7 \end{bmatrix}$$

Multiplicación de un escalar por una matriz

$$\alpha A = \alpha \begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_{1,1} & \dots & \alpha a_{1,m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha a_{m,1} & \dots & \alpha a_{m,n} \end{bmatrix}$$

Sea $\alpha = 4$ y $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix}$, encontrar αA

$$\alpha A = 4 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 0 & -8 & -16 \end{bmatrix}$$

Ej. Sean $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

Determinar la matriz $X \,/\, X + A = 2B$

=>

$$X + A = 2B$$
$$X = 2B - A$$
$$X = 2\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 6 & 13 & 7 \end{bmatrix}$$

Matriz de Producción

Una empresa que fabrica televisores produce 3 modelos con distintas características en 3 tamaños diferentes. La capacidad de producción (en miles de U$) en una planta está dada por la matriz:

	Modulo 1	**Modulo 1**	**Modulo 1**
Tamaño 1 (20 pulgadas)	5	3	2
Tamaño 2 (23 pulgadas)	7	4	5
Tamaño 3 (26 pulgadas)	10	8	4

	Modulo 1	**Modulo 1**	**Modulo 1**
Tamaño 1 (20 pulgadas)	4	5	3
Tamaño 2 (23 pulgadas)	9	6	4
Tamaño 3 (26 pulgadas)	8	12	2

¿Cuál es la capacidad de producción total en las dos plantas?. Si la empresa decide incrementar su producción en un 20%¿Cual será la nueva producción en la planta?

$$A + B = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 5 \\ 16 & 10 & 9 \\ 18 & 20 & 6 \end{bmatrix} \qquad 1.2A = 1.2\begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 7 & 4 & 5 \\ 10 & 8 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

Multiplicación de Matrices

Ej.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 6 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

=>

$$A * B = \begin{bmatrix} (1*1)+(3*-1)+(-1*1) & (1*0)+(3*2)+(-1*3) \\ (2*1)+(0*-1)+(0*1) & (2*0)+(0*2)+(0*3) \\ (0*1)+(-1*-1)+(6*1) & (0*0)+(-1*2)+(6*3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-3-1 & 1+6-3 \\ 2+0+0 & 0+0+0 \\ 0+1+6 & 0-2+18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 0 \\ 7 & 16 \end{bmatrix}$$

Sea

$P = \begin{bmatrix} 4 & 6 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ y $Q = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ encuentre P*Q

$$P * Q = \begin{bmatrix} 4-6-1+6 & 8+6-6+9 \\ 0+1+2+2 & 0-1+12+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 17 \\ 5 & 14 \end{bmatrix}$$

En general $A = a_{i,j}$ y $B = b_{i,j}$ => $A * B = a_{i,j} * b_{i,j} = c_{i,j}$

Ej.

El comercio entre 3 países durante 1996 (en millones de U$) está dado por la matriz $A = a_{i,j}$, representa las exportaciones del país i al país j. $A = \begin{bmatrix} 0 & 16 & 20 \\ 17 & 0 & 18 \\ 21 & 14 & 0 \end{bmatrix}$ el comercio entre estos tres países durante el año siguiente (millones de U$) está dado por la matriz $B = b_{i,j}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 17 & 19 \\ 18 & 0 & 20 \\ 24 & 16 & 0 \end{bmatrix}$

a) Escriba una matriz que represente el comercio total entre los tres países en el período de dos años.
b) Si en el año 1996 y 1997 el dólar era equivalente a U$5 de HonKong, escriba la matriz que representa el comercio total durante los 2 años en dólares de Honkong.

a) $A + B = \begin{bmatrix} 0 & 33 & 39 \\ 35 & 0 & 38 \\ 45 & 30 & 0 \end{bmatrix}$

b) $5(A + B) = \begin{bmatrix} 0 & 165 & 195 \\ 175 & 0 & 190 \\ 225 & 150 & 0 \end{bmatrix}$

Matriz Inversa

En algunas matrices pueden identificarse otra matriz denominada matriz inversa multiplicativa y se denomina por A^{-1}. => $A * A^{-1} = A^{-1} * A = I$

Ej.

$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$ Corregido queda $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & -3 \\ -1 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{f1+f3}$

$$\approx\begin{bmatrix}1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & -3 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix}_{3f3+f2} \approx\begin{bmatrix}1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\text{seguir}$$

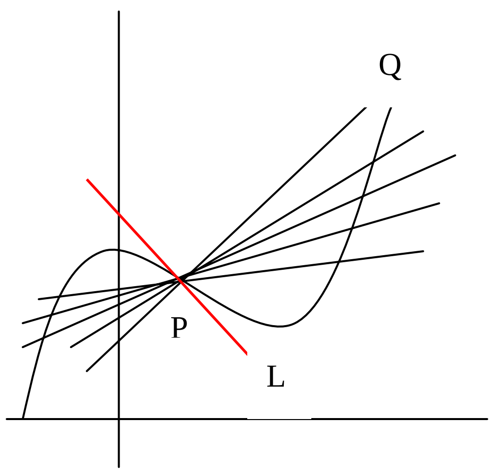
Ejercicios 2: Sea

$A=\begin{bmatrix}3 & 7\\ 2 & 5\end{bmatrix}$ Corregido queda $A\begin{bmatrix}3 & 7 & 1 & 0\\ 5 & 5 & 0 & 1\end{bmatrix}$ seguir

Ejercicio 3: Sea

$$A=\begin{bmatrix}2 & -4 & 6\\ 6 & 1 & 5\\ 1 & -2 & 3\end{bmatrix}$$

Derivaciones



L: recta tangente a la curva
P: punto intersección recta secante y L
Recta Secante: Recta que corta una curva
M secante = m tg

Def.

En un intervalo abierto $(x, f(x))$ la m de la grgáfica $g = f(x)$ es igual a la m de su recta tg en el intervalo y queda determinado por la fórmula:

$$m = Lim_{\Delta x->0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = Lim_{\Delta x->0}\frac{f(x-\Delta x)-f[x]}{\Delta x}$$

Reglas de los 4 pasos

Dado $y = f(x)$

1.- $f(x + \Delta x)$

2.- $f(x + \Delta x) - f(x)$

3.- $\dfrac{f(x + \Delta x) - f|x|}{\Delta x}$

4.- $Lim_{\Delta x -> 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

Ej.

Hallar la m de la tg $f(x) = 2x - 3$ en cualquier punto

1.- $f(x + \Delta x) = 2(x + \Delta x) - 3$

$= 2x + 2\Delta x - 3$

2.- $f(x + \Delta x) - f(x) = 2(x + \Delta x) - 3 - 2x + 3$

$= 2x + 2\Delta x - 2x$

$= 2\Delta x$

3.- $\dfrac{f(x + \Delta x) - f|x|}{\Delta x} = \dfrac{2(x + \Delta x) - 3 - 2x + 3}{\Delta x}$

$= \dfrac{2\Delta x}{\Delta x} = 2$

4.- $Lim_{\Delta x -> 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = Lim_{\Delta x -> 0} \dfrac{2(x + \Delta x) - 3 - 2x + 3}{\Delta x}$

$Lim_{\Delta x -> 0} 2 = 2$

Ej.

Sea $f(x) = \sqrt{x}$

1.- $f(x + \Delta x) = \sqrt{(x + \Delta x)}$

2.- $f(x + \Delta x) - f(x) = \sqrt{(x + \Delta x)} - \sqrt{x}$

3.- $\dfrac{f(x + \Delta x) - f|x|}{\Delta x} = \dfrac{\sqrt{(x + \Delta x)} - \sqrt{x}}{\Delta x}$

2.- $Lim_{\Delta x -> 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = Lim_{\Delta x -> 0} \dfrac{\sqrt{(x + \Delta x)} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \dfrac{0}{0} in \det er \min ado$

$$Lim_{\Delta x -> 0} \frac{\sqrt{(x + \Delta x)} - \sqrt{x}}{\Delta x} \left(\frac{\sqrt{(x + \Delta x)} + \sqrt{x}}{\sqrt{(x + \Delta x)} - \sqrt{x}} \right) = \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x \left(\left(\sqrt{x + \Delta x} \right) + \sqrt{x} \right)} = \frac{1}{\sqrt{(x + \Delta x)} + \sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Def.

El $Lim_{\Delta x -> 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ se llama derivada en x =>

$$f'(x) = Lim_{\Delta x -> 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Ej.

Encuentre $f'(x)$ si $f(x) = x^3 + 3x$

1.- $f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^3 + 3(x+\Delta x)$

$= x^3 + x^2\Delta x + x\Delta x^2 + \Delta x^3 + 3x + 3\Delta x$

2.- $f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^3 + 3(x+\Delta x) - x^3 - 3x$

$= x^3 + x^2\Delta x + x\Delta x^2 + \Delta x^3 + 3x + 3\Delta x - x^3 - 3x$

$= x^2\Delta x + x\Delta x^2 + \Delta x^3 + 3\Delta x$

$= \Delta x(x^2 + x\Delta x + \Delta x^2 + 3)$

3.- $\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \dfrac{\Delta x(x^2 + x\Delta x + \Delta x^2 + 3)}{\Delta x}$

4.- $Lim_{\Delta x -> 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = x^2 + \Delta x + \Delta x^2 + 3$

$= x^2 + 3$

Teoremas o Propiedades

Teorema 1:

Si $f(x) = C \Rightarrow f'(x) = 0$

Ej.

$f(x) = \pi \Rightarrow f'(\pi) = 0$

$f(x) = \pi \Rightarrow f'(\pi) = 0$

Teorema 2:

Si $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$

Teorema 3:

Si $f(x) = f(x) + -n(x) \Rightarrow f'(x) = f'(x) + -n'(x)$

Ej.

$f(x) = 3x^2 + fx + 2 \Rightarrow f'(x) = 6x + 5$

Teorema 4:

Si $f(x) = f(x) * g(x) \Rightarrow f'(x) = f'(x) * g(x) + g'(x) * f(x)$

Ej.

$F(x) = (4x^2 + 1)(3x + 2) \Rightarrow f'(x) = 8x(3x + 2) + 3(4x^2 + 1)$

$f'(x) = 24x^2 + 16x + 12x^2 + 3$

$f'(x) = 36x^2 + 16x + 3$

Teorema 5:

Si $f(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2}$

Ej.

$$f(x)=\frac{(x+3)}{(x-3)} \Rightarrow f'(x)=\frac{(x-3)-(x+3)}{(x-3)^2}$$

$$f'(x)=\frac{x-3-x-3}{(x-3)^2}=\frac{6}{(x-3)^2}$$

Teorema 6:

Si $F(x)=\sqrt[n]{f(x)}=(f(x))^{1/2} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{n}\left(f(x)^{1/2-1}\right) * f'(x)$

Ej.

$$f(x)=\sqrt{x^2+3}=\left(x^2+3\right)^{1/2} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2}(x+3)^{-1/2} * \frac{1}{2}2x$$

$$f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$$

Regla de la Cadena

Si $Y=(u(x))^n$ donde u es diferenciable en x => la derivada seria $\frac{dy}{dx}=nu(x)^{n-1} * u'(x)$.

Ej.

$$f(x)=\left(x^2+3x+1\right)^{10} \Rightarrow f'(x)=10\left(x^2+3x+1\right) * (2x+3)$$

Si $y=u(x)$ y $u=g(x) \Rightarrow y=u(x)=\frac{dy}{du}$

$u=g(x)=\frac{du}{dx}=\frac{dy}{du} * \frac{du}{dx}=\frac{dy}{dx}$

Ej.

$$y=u^{15}; \qquad u=2x-1$$

=>

$$\frac{dy}{dx}=15u^{14} \Rightarrow \frac{dy}{du} * \frac{du}{dx}=15u^{14} * 2=30u^{14}$$

$$\Rightarrow = 30(2x-1)^{14}$$

Derivación Implícita

$$f(x,y)=0$$

Cada vez que se deriva y se agrega y'

Ej.

$$x^2+y^2=4$$

$$x^2+y^2-4=0$$

$$\Rightarrow 2x+2yy'=0$$

$$2yy'=-2x$$

$$y' = \frac{-2x}{2y} \Rightarrow y' = \frac{-x}{y}$$

Ej.

$$x^2 + 3xy + y^2 - 2y + 9 = 0$$
$$2x + 3y + 3xy' + 2yy' - 2y' = 0$$
$$3xy' + 2yy' - 2y' = -2x - 3y$$
$$y'(3x + 2y - 2) = -2x - 3y$$
$$y' = \frac{(-2x - 3y)}{(3x + 2y - 2)}$$

Teorema 7:

$$\text{Si } f(x) = \log x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$$

Ej.

$$f(x) = \log(x+4) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x+4}$$

Teorema 8:

$$f(x) = \log(u(x)) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{u(x)} * u'(x)$$

Ej.

$$f(x) = \log(\sqrt{x}) \Rightarrow f(x) = \log x^{1/2}$$
$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} * \frac{1}{2} x^{-1/2}$$
$$f'(x) = \frac{x^{-1/2}}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2x}$$

Teorema 9:

$$\text{Si } f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$$

Teorema 10:

$$\text{Si } f(x) = e^{u(x)} \Rightarrow f'(x) = e^{u(x)} * u'(x)$$

Ej.

$$f(x) = e^{3x^2-5} \Rightarrow f'(x) = e^{3x^2-5} * 6x$$
$$f'(x) = 6xe^{3x^2-5}$$

Ej.

1.- $f(x) = \sqrt{\frac{x^2+3}{x}} = \left(\frac{x^2+3}{x}\right)^{1/2}$

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2+3}{x}\right)^{-1/2}*\left(\frac{(2x*x)-(x^2+3)}{x^2}\right)$$

$$f'(x)=\frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{x^2+3}{x}\right)^{1/2}}*\left(\frac{2x^2-x^2-3}{x^2}\right)$$

$$f'(x)=\frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{x^2+3}{x}\right)^{1/2}}*\left(\frac{x^2-3}{x^2}\right)$$

2.- $f(x)=(3x+1)^4(2x+3)^2$

$$f'(x)=4(3x+1)^3(2x+3)^2*3+2(2x+3)(3x+1)^4*2$$

$$f'(x)=(3x+1)^3(2x+3)*(12(2x+3)+4(3x+1))$$

3.- $f(x)=\log\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}=\log\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{1/2}$

$$f'(x)=\frac{1}{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{1/2}}*\left(\frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{-1/2}\left(\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2}\right)\right)$$

4.- $f(x)=e^{\log\sqrt{x}}=e^{\log(x)^{1/2}}$

$$f'(x)=e^{\log\sqrt{x}}*\frac{1}{x^{1/2}}*\frac{1}{2}x^{-1/2}$$

$$f'(x)=\frac{e^{\log\sqrt{x}}}{2x}$$

5.- $f(x)=e^{-x}*e^{x}$

6.- $f(x)=\frac{(4x^2+3x-5)}{(8x+3)}$

Derivadas Trigonométricas

1.- $f(x)=Sen(x)\Rightarrow f'(x)=Cos(x)$

2.- $f(x)=Cos(x)\Rightarrow f'(x)=-Sen(x)$

3.- $f(x)=Tg(x)\Rightarrow f'(x)=Sec^2(x)$

4.- $f(x)=Ctg(x)\Rightarrow f'(x)=-Co\sec^2(x)$

5.- $f(x)=Sec(x)\Rightarrow f'(x)=Sec(x)*Tg(x)$

6.- $f(x)=Co\sec(x)\Rightarrow f'(x)=-Co\sec(x)*Ctg(x)$

Ej.

$$f(x)=sen\left(e^{x^2+3}\right)\Rightarrow f'(x)=\cos\left(e^{x^2+3}\right)*e^{x^2+3}*2x$$

$$f'(x)=2xe^{x^2+3}\cos\left(e^{x^2+3}\right)$$

Ej.

$$f(x)=\sec^2(x)tg(x)\Rightarrow f'(x)=(2\sec(x)tg(x))(\sec(x)tg(x))+\sec^2(x)\sec^2(x)$$

$$f'(x)=\left(2\sec^2(x)tg^2(x)\right)+\sec^4(x)$$

$$f'(x)=\sec^2(x)\left(2tg^2(x)+\sec^2(x)\right)$$

Ej.

$$f(x)=\cos\left(sen\left(e^x\right)\right)\Rightarrow f'(x)=-sen\left(sen\left(e^x\right)\right)\cos\left(e^x\right)e^x$$

Derivaciones Trigonométricas Inversas

1.- $f(x)=arcsen(x)\Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

2.- $f(x)=\arccos(x)\Rightarrow f'(x)=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

3.- $f(x)=arctg(x)\Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$

4.- $f(x)=arcctg(x)\Rightarrow f'(x)=\dfrac{-1}{1+x^2}$

5.- $f(x)=arc\sec(x)\Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

6.- $f(x)=arcc\sec(x)\Rightarrow f'(x)=\dfrac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$

Ej.

$$f(x)=arctg\left(x^3\right)\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{1+\left(x^3\right)^2}*3x^2$$

$$f'(x)=\frac{3x^2}{1+x^6}$$

Ejercicios

1.- $f(x)=arc\sec\left(\sqrt{1+x^2}\right)\Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2-1}}*\dfrac{1}{2}\left(1+x^2\right)^{-1/2}*2x$

$$f'(x)=\frac{x}{x\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+x^2}}$$

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

2.- $f(x)=sen(x)^{\sqrt{x}} \Rightarrow y=sen(x)^{\sqrt{x}}$ / ln

$$\Rightarrow \lim y=\sqrt{x}Lim(sen(x))$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y}y'=\frac{1}{2}x^{-1/2}Lim(sen(x))+\frac{1}{sen(x)}\cos(x)\sqrt{x}$$

$$\Rightarrow y'=y\left(\frac{1}{2}x^{-1/2}Lim(sen(x))+\frac{1}{sen(x)}\cos(x)\sqrt{x}\right)$$

$$\Rightarrow y'=sen(x)^{\sqrt{x}}\left(\frac{Lim(sen(x))}{2\sqrt{x}}+\frac{\cos(x)\sqrt{x}}{sen(x)}\right)$$

3.- $f(x)=\frac{1}{4}sen^4(x^2+x+1) \Rightarrow f'(x)=sen^3(x^2+x+1)\cos(x^2+x+1)(2x+1)$

Aplicación de la Derivada

Def. Extremos:

Sea f definido en un intervalo (a,b), conteniendo c.

i) $f(c)$ es mínimo de f en (a,b) si $f(c)\le f(x)\forall x\in(a,b)$

ii) $f(c)$ es máximo de f en (a,b) si $f(c)\ge f(x)\forall x\in(a,b)$

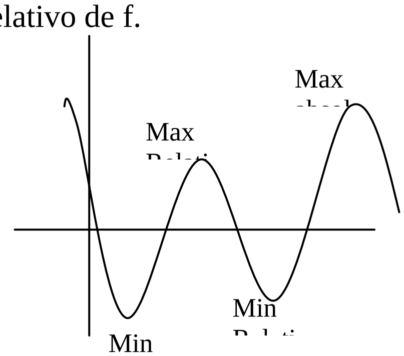
Teorema

Si f continua en un intervalo cerrado $[a,b]\Rightarrow f$ tiene un máximo y también un mínimo en ese intervalo.

Def. Extremos Relativos

i) Si $\exists$ algún intervalo abierto en el que $f(c)$ es valor máximo, se dice que $f(c)$ es un máximo relativo de f.

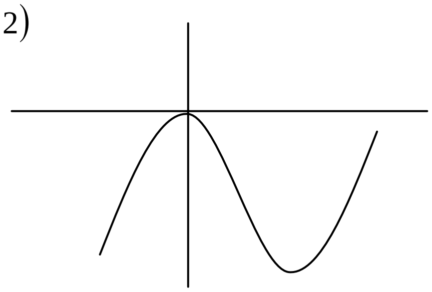
ii) Si $\exists$ algún intervalo abierto en el que $f(c)$ es valor mínimo, se dice que $f(c)$ es un mínimo relativo de f.



Ej.

Sea $f(x)=x^3-3x^2 \Rightarrow f'(x)=3x^2-6x$

$\Rightarrow f'(x)=3x(x-2)$



con x=0 tenemos

$3x=0 \Rightarrow x=0$ Valores críticos

$x-6=0 \Rightarrow x=2$

$f(0)=0 \Rightarrow p(0,0)$

$f(2)=2^3-3*2^2=8-12=-4 \Rightarrow p(2,-4)$

	$(-\infty,0)$	$(0,2)$	$(2,\infty)$
$f(x)$	$\uparrow$	$\downarrow$	$\uparrow$

Ej.

Sea $f(x)=3x^4-4x^3$ en $[-1,2]$ tenemos $f'(x)=12x^3-12x^2$

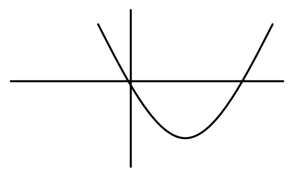
$f'(x)=12x^2(x-1)$

con x=0 tenemos

$12x^2=0 \Rightarrow x=0$ y $x-1=0 \Rightarrow x=1$ Valores críticos

$f(0)=0 \Rightarrow p(0,0)$ $f(1)=3*1^4-4*1^3=3-4=-1 \Rightarrow p(1,-1)$

	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,2)$
$f(x)$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\uparrow$



Ej.

Sea $f(x)=x^4-2x^2$

$f'(x)=4x^3-4x$

$f'(x)=4x(x^2-1)$

con x=0 tenemos

$4x=0 \Rightarrow x=0$

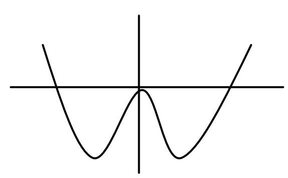
$x^2-1=0 \Rightarrow x_1=1 \wedge x_2=-1$ Valores críticos

$f(0)=0 \Rightarrow p(0,0)$

$f(1)=1^4-2*1^2=1-2=-1 \Rightarrow p(1,-1)$

$f(1)=(-1)^4-2*(-1)^2=1-2=-1 \Rightarrow p(1,-1)$

	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,2)$
$f(x)$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\uparrow$



Criterios

i) $f'(x) > 0; \forall x \in (a,b) \Rightarrow f(x)\uparrow$
ii) $f'(x) < 0; \forall x \in (a,b) \Rightarrow f(x)\downarrow$
iii) $f'(x) = 0; \forall x \in (a,b) \Rightarrow f(x) cte$

Teorema

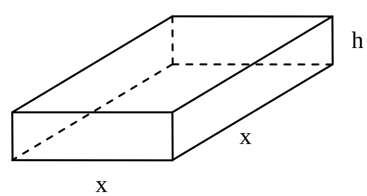
Si c es número crítico de una función continua en un intervalo abierto (a,b) que contiene a c. Si f derivable en (a,b), excepto quizás en c; $f(c)$ puede clasificarse de la siguiente forma:

i) Si f' cambia de - a + en c; $f(c)$ es mínimo relativo de f.
ii) Si f' cambia de + a - en c; $f(c)$ es máximo relativo de f.
iii) Si f' no cambia su signo en c; $f(c)$ no es ni mínimo ni máximo relativo de f.

Optimización Problemas

1.- Se quiere construir una caja abierta con base cuadrada empleando 108 cm^2 de material. ¿Qué dimensiones producirán una caja de volumen máximo?

$V = x^2 h$
$S = 108$
$S = 4xh + x^2$
$4xh + x^2 = 108$
$h = \frac{108 - x^2}{4x}$



$$V(x) = x^2\left(\frac{108 - x^2}{4x}\right) = \frac{108x}{4} - \frac{x^3}{4} = 27x - \frac{x^3}{4}$$

$$V'(x) = 27 - \frac{3x^2}{4}$$

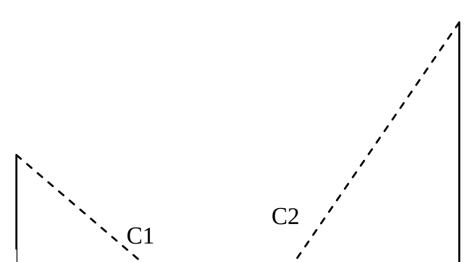
con x=0 tenemos

$$27 - \frac{3x^2}{4} = 0 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{27*4}{3}} = \sqrt{36} = 6$$

$$h = \frac{108 - x^2}{4x} = \frac{108 - 36}{24} = 3$$

2.- Dos postes de 12 pies y 28 pies de altura distan 30 pies entre si. Se desea extender un cable fijado en un único punto del suelo entre las puntas de ambos postes. ¿En qué punto del suelo hay que fijar el cable para usar el mínimo cable posible?

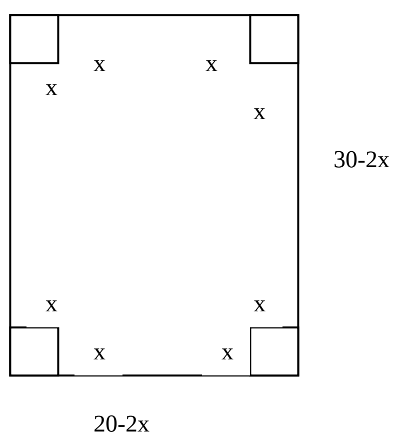
$L = c_1 + c_2$



$c^2 = a^2 + b^2$
$c_1 = \sqrt{x^2 + 12^2} = \sqrt{x^2 + 144}$
$c_2 = \sqrt{(30 - x)^2 + 28^2} = \sqrt{(30 - x)^2 + 784}$
$L(x) = \sqrt{x^2 + 144} + \sqrt{(30 - x)^2 + 784}$
$L(x) = \sqrt{x^2 + 144} + \sqrt{900 - 60x + x^2 + 784}$
$L(x) = \sqrt{x^2 + 144} + \sqrt{x^2 - 60x + 1684}$
$L'(x) = \frac{1}{2}\left(x^2 + 144\right)^{-1/2} * 2x + \frac{1}{2}\left(x^2 - 60x + 1684\right)^{-1/2} * (2x - 60)$
$L'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 144}} + \frac{x - 30}{\sqrt{x^2 - 60x + 1684}} = 0$
$\frac{x\sqrt{x^2 - 60x + 1684} + (x - 30)\sqrt{x^2 + 144}}{\sqrt{x^2 + 144} * \sqrt{x^2 - 60x + 1684}} = 0$
$x\sqrt{x^2 - 60x + 1684} + (x - 30)\sqrt{x^2 + 144} = 0\left(\sqrt{x^2 + 144} * \sqrt{x^2 - 60x + 1684}\right)$ ampliando por 2
$x^2\left(x^2 - 60x + 1684\right) + (x - 30)^2\left(x^2 + 144\right) = 0$
$x^2\left(x^2 - 60x + 1684\right) = (x - 30)^2\left(x^2 + 144\right)$
$x^4 - 60x^3 + 1684x^2 = \left(x^2 - 60x + 900\right)\left(x^2 + 144\right)$
$x^4 - 60x^3 + 1684x^2 = x^4 + 144x^2 - 60x^3 - 8460x + 900x^2 + 129600$
$640x^2 + 8460x - 129600 = 0$
$x_1 = 9 \wedge x_2 = 22.5$

3.- Se requiere construir una caja rectangular cortando un cuadrado de cada esquina de una pieza rectangular de cartón y doblándolo hasta formar la caja deseada. Si las dimensiones de la hoja de cartón son de 20 cms por 30 cms. Se desea hallar las dimensiones de la caja más grande que se pueda construir.

$V = xh$
$V(x) = x(20 - 2x)(30 - 2x)$
$V'(x) = x\left(60 - 40x - 60x + 4x^2\right)$
$V'(x) = \left(60x - 100x^2 + 4x^3\right)$
¿???



4.- Se pide diseñar una lata de aceite con la forma de un cilindro circular recto. ¿Qué dimensión utilizará menos material.

$A_L = 2\pi rh$ Área Lateral

$A_\Theta = 2\pi r^2$

$A_T = 2\pi r^2 + 2\pi rh$

$V = \pi r^2 h$

$350 = \pi r^2 h$

$h = \dfrac{350}{\pi r^2}$

=> $A_T = 2\pi r^2 + 2\pi r \dfrac{350}{\pi r^2}$ $\quad A_T = 2\pi r^2 + \dfrac{700}{r}$ $\quad A'_T = 4\pi r - \dfrac{700}{r^2} = 0$

$4\pi r^3 = 700$ $\quad r^3 = \dfrac{700}{4\pi}$ $\quad r = \sqrt[3]{\dfrac{350}{2\pi}}$

Integrales Indefinidas

$f'(x) = 2x \Rightarrow F(x) = x^2$

$f'(x) = \dfrac{3}{2}x \Rightarrow F(x) = \dfrac{x^3}{2}$

$f'(x) = \dfrac{1}{2}x^{-1/2} \Rightarrow F(x) = \sqrt{x}$

$f'(x) = F(x) \Rightarrow G(x) = H(x) + C$

$f'(x) = 2x \Rightarrow F(x) = x^2 + C$

$\int f(x)dx$ Integrada

Si $y = F(x)$ es una antiderivada de F, => se dice que $F(x)$ es la solución de la ecuación $\dfrac{dy}{dx} = f(x) \therefore \dfrac{dy}{dx} = f(x) \Rightarrow dy = f(x)dx$. La operación para encontrar las soluciones de esta ecuación se denomina integración.

$$y = \int f(x)dx = F(x) + c$$

Ej.

1.- $\int 3x dx = \dfrac{3x^2}{2} + c$

2.- $\int \sqrt{x}dx = \int x^{1/2}dx = \dfrac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} + c = \dfrac{2}{3}\sqrt{x^3} + c = \dfrac{2}{3}x\sqrt{x} + c$

Propiedades

1.- $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$

2.- $\int Kdx = K\int dx = Kx + c$

3.- $\int f(x) + -g(x) = \int f(x)dx + -\int g(x)dx$

Ej.

1.- $\int (3x^2 + 5x + 3)dx = x^3 + \dfrac{5}{2}x^2 + 3x + c$

2.- $\int x^{-3}dx = \dfrac{x^{-2}}{-2} + c = -\dfrac{1}{2x} + c$

3.- $\int \dfrac{x^{-3}}{\sqrt{x}}dx = \int (x+1)x^{-1/2}dx = \int \left(x^{1/2} + x^{-1/2} \right)dx = \dfrac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} + \dfrac{x^{1/2}}{\frac{1}{2}} + c = \dfrac{3}{2}\sqrt{x^3} + 2\sqrt{x} + c$

4.- $\int \sqrt{x+1}dx = \int (x+1)^{1/2}dx = \dfrac{(x+1)^{3/2}}{3/2} + c = \dfrac{3}{2}\sqrt{(x+1)^3} + c$

5.- $\int x\sqrt{x^2 + 1}dx$

$u = x^2 + 1$

$du = 2xdx$

$\dfrac{du}{2} = xdx \Rightarrow \dfrac{1}{2}\int \sqrt{u}du = \dfrac{1}{2}\int u^{1/2}du = \dfrac{1}{2}\dfrac{u^{3/2}}{3/2} + c = \dfrac{1}{3}\sqrt{u^3} + c = \dfrac{1}{3}\sqrt{(x^2+1)^3} + c$

$= \dfrac{1}{3}\left(x^2 + 1\sqrt{x^2+1} + c \right)$

Propiedades

$\int f(f(x))g'(x)dx = F(g(x)) + c$

Ej.

1.- $\int (2x+1)(x^2 + x)dx$

$u = x^2 + x \Rightarrow du = (2u+1)dx$

2.- $\int 3x^2\sqrt{x^2 - 2}dx$

$u = x^3 - 2 \Rightarrow du = 3x^2 dx$

3.- $\int \frac{4x}{(1-2x^2)}dx$

$$u = 1-2x^2 \Rightarrow du = -4x^2dx \Rightarrow -du = 4xdx$$

4.- $\int \left(1+\frac{1}{x}\right)^3 \frac{1}{x^2}dx$

$$u = 1+\frac{1}{x} \Rightarrow du = -\frac{1}{x^2}dx \Rightarrow -du = \frac{1}{x^2}dx$$

Propiedades

1.- $\int \frac{1}{x}dx = Ln(x)+c$

2.- $\int e^x dx = e^x + c$

3.- $\int \cos(x)dx = sen(x)+c$

4.- $\int sen(x)dx = -\cos(x)+c$

5.- $\int \sec^2(x)dx = tg(x)+c$

6.- $\int \cos ec^2(x)dx = -ctg(x)+c$

7.- $\int \sec(x)tg(x)dx = \sec(x)+c$

8.- $\int \cos ec(x)ctg(x)dx = -\cos ec(x)+c$

9.- $\int tg(x)dx = \log(\sec(x))+c$

10.- $\int csen\ (x)dx\ =\ -\cos\ (x)+\ c$

11.- $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = arcsen\left(\frac{x}{a}\right)+c$

12.- $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}arctg\left(\frac{x}{a}\right)+c$

13.- $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a}arc\sec\left(\frac{x}{a}\right)+c$

14.- $\int \sec(x)dx = \log(\sec(x)+tg(x))+c$

Ej.

1.- $\int \cos^3(x)sen(x)dx$

$$u = \cos(x) \Rightarrow du = -sen(x)dx$$
$$\Rightarrow -du = sen(x)dx$$

=>

$$\int \cos^3(x)sen(x)dx = -\int u^3du$$

$$= -\frac{u^4}{4} + c$$

$$\int \cos^3(x) sen(x) dx = -\frac{\cos^4(x)}{4} + c$$

2.- $\int sen^3(2x+1)\cos(2x+1)dx$

$$u = sen(2x+1)$$
$$du = \cos(2x+1) * 2dx$$
$$\frac{du}{2} = \cos(2x+1)dx$$

$$\int sen^3(2x+1)\cos(2x+1)dx = \frac{1}{2}\int u^3 du$$
$$= \frac{1}{2}\frac{u^4}{4} + c$$
$$= \frac{1}{8} sen^4(2x+1) + c$$

3.- $\int \frac{\cos(2x)}{\cos(x)} dx = \int \frac{\cos^2(x) + sen^2(x)}{\cos(x)} dx = \int \left(\cos(x) - \frac{sen^2(x)}{\cos(x)} \right) dx =$

$$= \int \cos(x)dx - \int \frac{sen^2(x)}{\cos(x)} dx = \int \cos(x)dx - \int \frac{(1-\cos^2(x))}{\cos(x)} dx$$
$$= \int \cos(x)dx - \int \frac{1}{\cos(x)} dx - \int \cos(x)dx$$
$$= 2\int \cos(x)dx - \int \sec(x)dx$$
$$= -2sen(x) - \ln(\sec(x) + tg(x)) + c$$

4.- $\int \frac{dx}{(1+x^2)Arctg(x)} =$

$$u = Arctg(x) \Rightarrow du = \frac{1}{1+x^2} dx$$

=>

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)Arctg(x)} = \int \frac{du}{u}$$
$$= Ln(u) + c$$
$$= Ln(Arctg(x)) + c$$

5.- $\int \frac{\cos(x)}{a + bsen(x)} dx =$

$$u = a + bsen(x) \Rightarrow du = b\cos(x)dx$$
$$\frac{du}{b} = \cos(x)dx$$

=>

$$\int \frac{\cos(x)}{a+bsen(x)}dx = \frac{1}{b}\int \frac{du}{u}$$

$$= \frac{1}{b}\ln(u) + c$$

$$= \frac{1}{b}\ln(a + bsen(x)) + c$$

6.- $\int \cos^2(x)dx =$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - sen^2(x)$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - (1 - \cos^2(x))$$

$$\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$$

$$\frac{\cos(2x)+1}{2} = \cos^2(x)$$

=>

$$\int \cos^2(x)dx = \int\left(\frac{\cos(2x)+1}{2}\right)dx$$

7.- $\int sen^2(x)dx =$

$$\cos(2x) = 1 - sen^2(x) - sen^2(x)$$

$$\cos(2x) = 1 - 2sen^2(x)$$

$$2sen^2(x) = 1 - \cos^2(x)$$

$$sen^2(x) = \frac{1-\cos^2(x)}{2}$$

=>

$$\int sen^2(x)dx = \int\left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)dx$$