INSTITUTO UNIVERSITARIO DE TECNOLOGÍA
“JOSÉ ANTONIO ANZOÁTEGUI”
EL TIGRE-EDO-ANZOÁTEGUI
Cátedra: Matemática I
Especialidad Administración
Lic. MSc. DÁMASO ROJAS

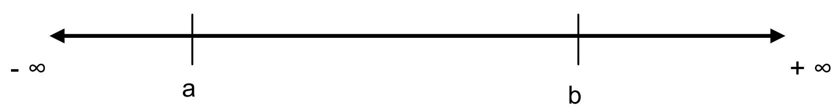
EJERCICIOS RECOLECTADOS EN LA RED. (MATEMÁTICA I ADMINISTRACIÓN)

INECUACIONES Y VALOR ABSOLUTO

INTERVALOS – DESIGUALDADES – INECUACIONES

INTERVALOS EN LA RECTA REAL

Dados dos números cualesquiera *a* y *b*, tales que *a* < *b* de la recta real, se define **intervalo** de extremos *a* y *b* al conjunto de los números reales comprendidos entre *a* y *b*.



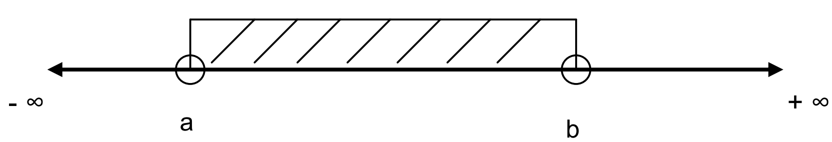
El segmento $\overline{ab}$ se llama intervalo.

CLASIFICACIÓN DE LOS INTERVALOS

- **Abierto en ambos extremos**

En forma de conjunto: $(a,b)=\{x \in IR \;/\; a < x < b\}$

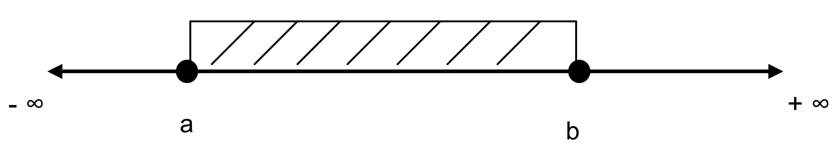
Representación Gráfica:



- **Cerrado en ambos extremos**

En forma de conjunto: $[a,b]=\{x \in IR \;/\; a \leq x \leq b\}$

Representación Gráfica:

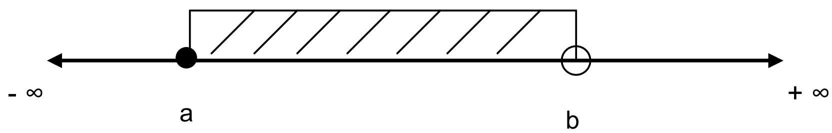


- **Semiabierto por la derecha:**

En forma de conjunto: $[a,b)=\{x \in IR \;/\; a \leq x < b\}$

http:\\www.galeon.com\damasorojas\
E-mail:damasorojas8@gmail.com,damasorojas8@galeon.com, joeldama@yahoo.com

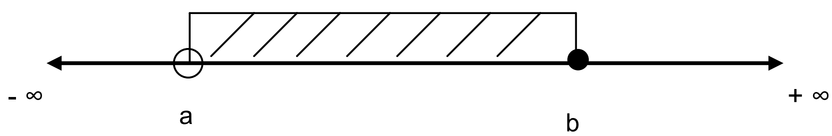
Representación Gráfica:



- **Semiabierto por la izquierda:**

En forma de conjunto: $(a,b] = \{x \in IR \ / \ a < x \ \leq b\}$

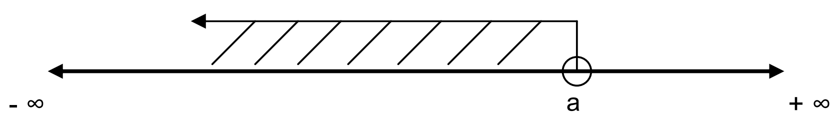
Representación Gráfica:



- **Abierto por la derecha que se extiende hacia la izquierda:**

En forma de conjunto: $(-\infty, a) = \{x \in IR \ / \ x < a\}$

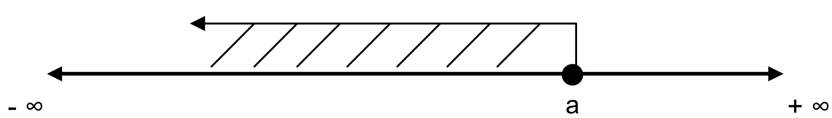
Representación Gráfica:



- **Cerrado por la derecha que se extiende hacia la izquierda:**

En forma de conjunto: $(-\infty, a] = \{x \in IR \ / \ x \leq a\}$

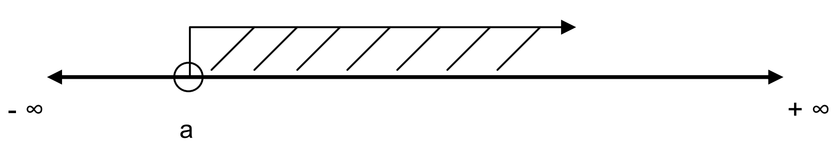
Representación Gráfica:



- **Abierto por la izquierda que se extiende hacia la derecha:**

En forma de conjunto: $(a, +\infty) = \{x \in IR \ / \ x > a\}$

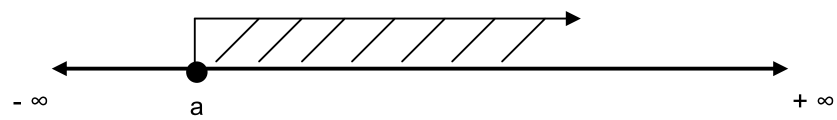
Representación Gráfica:



- **Cerrado por la izquierda que se extiende hacia la derecha:**

En forma de conjunto: $\left[a,+\infty\right) = \left\{x \in IR \ / \ x \geq a\right\}$

Representación Gráfica:



DESIGUALDAD

Es una expresión que indica que una cantidad es mayor o menor que otra, y sus signos son**:**

< Se lee menor que.

≤ Se lee menor o igual que.

> Se lee mayor que.

≥ Se lee mayor o igual que.

Una cantidad *a* es **mayor** que otra cantidad *b* cuando la diferencia *a* - *b* es positiva. Así, 4 es mayor que - 2 porque la diferencia 4 - (- 2) = 4 + 2 = 6 es positiva; - 1 es mayor que - 3 porque - 1 - (- 3) = - 1 + 3 = 2 es una cantidad **positiva**.

Una cantidad *a* es **menor** que otra cantidad *b* cuando la diferencia *a* - *b* es negativa: así, - 1 es menor que 1 porque la diferencia - 1 - 1 = - 2 es negativa: - 4 es menor que - 3 porque la diferencia - 4 - (- 3) = - 4 + 3 = - 1 negativa.

Según lo anterior, cero es **mayor que cualquier cantidad negativa**, por lo tanto 0 es mayor que - 1 porque 0 - (- 1) = 0 + 1 = 1, cantidad positiva.

El **primer miembro** de una desigualdad es la expresión que está a la izquierda y el **segundo miembro** está a la derecha del signo de desigualdad. En *a* + *b* > *c* - *d* el primer miembro es *a* + *b* y el segundo *c* - *d*.

Los **términos** de una desigualdad son las cantidades separadas de otras por el signo + ó -, o por la cantidad que está sola en un miembro. En la desigualdad anterior los términos son *a*, *b*, *c* y - *d*.

Dos desigualdades son del **mismo signo** o **subsisten en el mismo sentido** cuando sus primeros miembros son mayores o menores que los segundos. De este modo, $a > b$ y $c > d$ son desigualdades del mismo sentido.

Dos desigualdades son de **signo contrario** o **no subsisten en el mismo sentido** cuando sus primeros miembros no son mayores o menores que los segundos. Así, $5 > 3$ y $1 < 2$ son desigualdades de sentido contrario.

Podemos separar las desigualdades en dos tipos:

Desigualdades Numéricas: Son desigualdades que ordenan elementos del conjunto de los números reales.

Sean a y b $\in$ R podemos entonces decir que las desigualdades numéricas pueden tomar las siguientes formas:

$a < b$ Se lee a menor que b

$a \leq b$ Se lee a menor o igual que b

$a > b$ Se lee a mayor que b

$a \geq b$ Se lee a mayor o igual que b

Ejemplos:

$5 < 3$ Se lee 5 menor que 3

$2 \leq 4$ Se lee 2 menor o igual que 4

$7 > 6$ Se lee 7 mayor que 6

$5 \geq 1$ Se lee 5 mayor o igual que 1

Desigualdades Polinómicas: Son desigualdades que contienen números y expresiones con una o más variables. Las desigualdades polinómicas pueden ser divididas como se muestra a continuación:

Desigualdades Absolutas: Son desigualdades que se cumplen para todos los valores de las variables.

Ejemplos:

1) $x^2 \geq 0$

2) $x^4 + 1 > 0$

3) $(x-y)^2+2>0$

Desigualdades Condicionales o Inecuaciones: Son desigualdades que no se cumplen para todos los valores reales de las variables.

Ejemplos:

1) $x^2>3$

2) $x+2\le 5$

3) $x-y>-4$

PROPIEDADES DE LAS DESIGUALDADES

1) Si a los dos miembros de una desigualdad se les suma o resta una misma cantidad, el signo de la desigualdad no varía. Dada la desigualdad *a* > *b*, se puede escribir:

$$a + c > b + c \qquad \text{y} \qquad a - c > b - c$$

En una desigualdad un término cualquiera puede pasar de un miembro al otro cambiándole el signo.

En la desigualdad *a* > *b* + *c* se puede pasar *c* al primer miembro con signo negativo quedando *a* - *c* > *b*, porque equivale a restar *c* a los dos miembros.

En la desigualdad *a* - *b* > *c*, se puede pasar *b* con signo positivo al segundo miembro y quedando *a* > *b* + *c* , porque equivale a sumar *b* a los dos miembros.

2) Si los dos miembros de una desigualdad se multiplican o dividen por una misma cantidad positiva, el signo de la desigualdad no varía. Dada la desigualdad *a* > *b* y siendo *c* una cantidad positiva, puede escribirse:

$$ac>bc \quad y \quad \frac{a}{c}>\frac{b}{c}$$

Es posible **suprimir denominadores** en una desigualdad **sin que varíe** el signo de la desigualdad, porque ello equivale a multiplicar todos los términos de la desigualdad, o sea sus dos miembros, por el m. c. m. de los denominadores.

3) Si los dos miembros de una desigualdad se **multiplican** o **dividen** por una misma **cantidad negativa**, el signo de la desigualdad varía. Si en la desigualdad *a* > *b* se multiplica ambos miembros por - *c*, se tiene: - *ac* < - *bc*

Si se divide por -c , o sea multiplicando por $-\frac{1}{c}$, se tiene: $-\frac{a}{c} < -\frac{b}{c}$

Al cambiar el signo a **todos** los términos, es decir, a los **dos miembros** de una desigualdad, el signo de ésta **varía** porque equivale a multiplicar los dos miembros de la desigualdad por - 1. Si en la desigualdad $a - b > - c$ cambiamos el signo a todos los términos, se tiene: $b - a < c$

4) Si cambia el **orden** de los miembros, la desigualdad **cambia de signo.** Si $a > b$ es evidente que $b < a$

5) Si se invierten los dos miembros, la desigualdad cambia de signo.

Siendo $a > b$ se tiene que $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

6) Cuando los miembros de una desigualdad son **positivos** y se elevan a una misma **potencia positiva**, el signo de la desigualdad no cambia. **5 > 3 y elevando al cuadrado: $5^2 > 3^2$ o sea 25 > 9**

7) Si los dos miembros o **sólo uno** es negativo y se eleva a una potencia **impar positiva**, el signo de la desigualdad **no** cambia.

Siendo - 3 > - 5 y elevando al cubo $(- 3)^3 > (- 5)^3$ o sea - 27 > - 125

Siendo 2 > - 2 y elevando al cubo $2^3 > (- 2)$ o sea 8 > - 8

8) Si los **dos** miembros son **negativos** y se elevan a una **misma potencia par positiva**, el signo de la desigualdad **cambia.** Siendo - 3 > - 5 y elevando al cuadrado $(- 3)^2 = 9$ y $(- 5)^2 = 25$ y queda 9 < 25.

9) Cuando un miembro es **positivo** y otro **negativo**, y ambos se elevan a una misma potencia **par positiva**, el signo de la desigualdad puede cambiar.

Siendo 3 > - 5 y elevando al cuadrado $3^2 = 9$ y $(- 5)^2 = 25$ y queda 9 < 25 (cambia el signo)

Siendo 8 > - 2 y elevando al cuadrado $8^2 = 64$ y $(- 2)^2 = 4$ y queda 64 > 4 (no cambia el signo)

10) Cuando los dos miembros de una desigualdad son positivos y se les **extrae una misma raíz positiva**, el signo de la desigualdad no cambia.

a > *b* y *n* es positivo, se tiene: $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$

11) Si dos o más desigualdades del mismo signo se suman o multiplican miembro por miembro, resulta una desigualdad del mismo signo. Si *a* > *b* y *c* > *d*, se tiene:

$$\begin{array}{c} a > b \\ \underline{c > d} \\ a+c > b+d \end{array} \qquad \begin{array}{c} a > b \\ \underline{c > d} \\ a\times c > b\times d \end{array}$$

12) Cuando dos desigualdades del mismo signo se restan o dividen miembro por miembro, el resultado no necesariamente será una desigualdad del mismo signo, pues, puede ser una igualdad.

En 10 > 8 y 5 > 2, restando miembro por miembro: $\begin{array}{c} 10 > 8 \\ \underline{5 > 2} \\ 10-5 < 8-2 \\ 5 < 6 \end{array}$ (cambia de signo)

Al dividir miembro por miembro las desigualdades 10 > 8 y 5 > 4 tenemos

$$\begin{array}{c} 10 > 8 \\ \underline{5 > 4} \\ 10\div 5 < 8\div 4 \\ 2 = 2 \end{array}$$ (Resulta una igualdad)

INECUACIONES

Una **inecuación** es una desigualdad en la que hay una o más cantidades desconocidas (incógnitas) y que sólo se verifica (o demuestra) para determinados valores de las incógnitas. Las inecuaciones también se conocen como **desigualdades de condición.**

La desigualdad 2*x* - 3 > *x* + 5 es una inecuación porque tiene la incógnita *x* y sólo se verifica para cualquier valor de *x* mayor que 8. Para *x* = 8 se convertiría en una igualdad y para *x* < 8 en una desigualdad de signo contrario.

http:\\www.galeon.com\damasorojas\
E-mail:damasorojas8@gmail.com,damasorojas8@galeon.com, joeldama@yahoo.com

Para resolver una **inecuación** deben encontrarse los valores de las incógnitas que satisfagan la inecuación.

La resolución de inecuaciones se fundamenta en las propiedades de las desigualdades antes expuestas y en las **consecuencias** que de las mismas se derivan.

INECUACIONES LINEALES DE PRIMER GRADO

Ejemplos

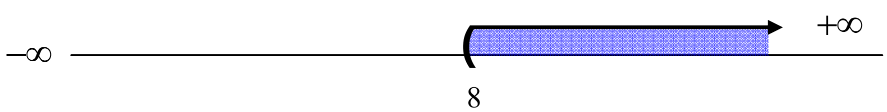
1) Resolver $2x - 3 > x + 5$

Pasando x al primer miembro y 3 al segundo se tiene:

$2x - x > 5 + 3$

Reduciendo: $x > 8$

S=$(8,+\infty) = \{x \in R / x > 8\}$



2) Hallar el límite de x en $7 - \frac{x}{2} > \frac{5x}{3} - 6$

Suprimiendo denominadores (ver propiedad 2) se tiene: $42 - 3x > 10x - 36$

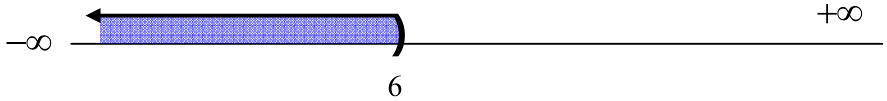
Trasponiendo términos: $-3x - 10x > -36 - 42$

$-13x > -78$

Cambiando el signo a los dos miembros, lo cual hace cambiar el signo de la desigualdad, origina: $13x < 78$

Dividiendo por 13: $x < \frac{78}{13}$ o sea, $x < 6$.

S=$(-\infty, 6) = \{x \in R / x<6\}$



3) Encontrar el límite de *x* en (*x* + 3) (*x* - 1) < (*x* - 1)^2 + 3*x*

Efectuando las operaciones indicadas:

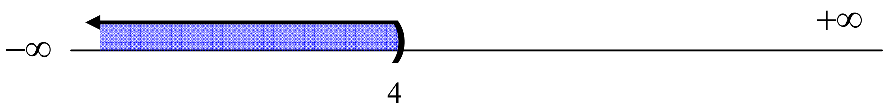
$x^2 + 2x - 3 < x^2 - 2x + 1 + 3x$

Suprimiendo x^2 en ambos miembros y transponiendo:

$2x + 2x - 3x < 1 + 3$

$$x < 4$$

S=$\left(-\infty, 4\right) = \left\{x \in R / x<4\right\}$



4) Dada la siguiente inecuación $3x + 5 > 0$. Halle el conjunto solución y grafíquelo.

$3x + 5 > 0$

Sumando -5 a ambos miembros de la inecuación se obtiene: $3x + 5 - 5 > 0 - 5$

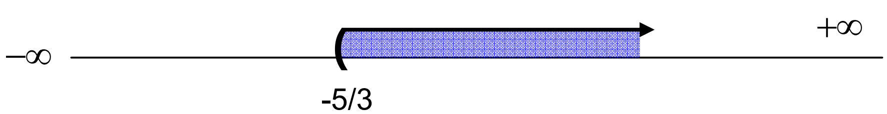
$3x > -5$

Multiplicando por $\frac{1}{3}$ a ambos miembros de la ecuación para obtener:

$\frac{1}{3}3x > -5\frac{1}{3}$

$x > -\frac{5}{3}$

S=$\left(-\frac{5}{3}, +\infty\right) = \left\{x \in R / x > -\frac{5}{3}\right\}$



http:\\www.galeon.com\damasorojas\
E-mail:damasorojas8@gmail.com,damasorojas8@galeon.com, joeldama@yahoo.com

5) Dada la siguiente inecuación $3x+5>5x-2$. Halle el conjunto solución y grafíquelo.

$3x+5>5x-2$

Sumando 2 y $-5x$ a ambos miembros de la inecuación se obtiene:

$3x+5-5x+2>5x-2-5x+2$

$-2x+7>0$

Sumando -7 a ambos miembros de la inecuación se obtiene:

$-2x+7-7>-7$

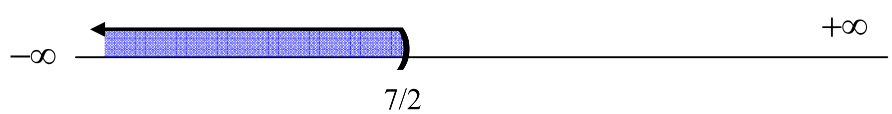
$-2x>-7$

Multiplicando por $-\frac{1}{2}$ a ambos miembros de la inecuación se obtiene:

$-2x\left(-\frac{1}{2}\right)>-7\left(-\frac{1}{2}\right)$

$x<\frac{7}{2}$ Note que se multiplicó por un número negativo y se invirtió el sentido de la inecuación.

El conjunto solución es entonces; S=$\left(-\infty,\frac{7}{2}\right)=\left\{x\in R/x<\frac{7}{2}\right\}$



6) Dada la siguiente inecuación $\frac{3}{x}\leq\frac{5}{4}$. Halle el conjunto solución y grafíquelo.

Se tiene que tener una expresión lineal en la inecuación, por tanto se debe multiplicar a ambos miembros por la variable x. Pero como se desconoce el signo de esta variable se deben considerar dos casos.

Caso 1: Cuando $x>0$

Caso 2: Cuando $x<0$

El caso $x=0$ no se considera porque no se puede dividir por cero.

Caso I: Al multiplicar por $x>0$ el sentido de la inecuación no se altera, obteniéndose:

$3 \leq \frac{5x}{4}$

Multiplicamos por $\frac{4}{5}$ a ambos miembros de la inecuación se obtiene:

$\frac{12}{5} \leq x$

Para el Caso 1 se obtiene una solución parcial que llamaremos S_1, la cual debe incluir todos los números reales que cumplan con:

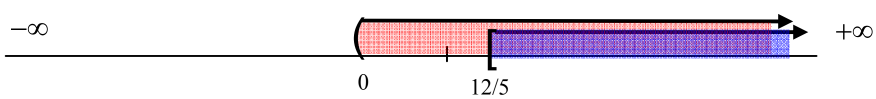
$x > 0$ y $\frac{12}{5} \leq x$

Si S_A es el conjunto solución de $x > 0$ y S_B el conjunto solución de $\frac{12}{5} \leq x$ entonces la solución parcial S_1 será: $S_1 = S_A \cap S_B$.

$$S_A = (0, +\infty) = \{x \in R / x > 0\}$$

$$S_B = \left[\frac{12}{5}, +\infty\right) = \left\{x \in R / x \geq \frac{12}{5}\right\}$$

$$S_1 = S_A \cap S_B = (0, +\infty) \cap \left[\frac{12}{5}, +\infty\right) = \left[\frac{12}{5}, +\infty\right)$$



Caso 2: Al multiplicar por $x < 0$ el sentido de la inecuación se invierte obteniéndose:

$3 \geq \frac{5x}{4}$

Multiplicamos por $\frac{4}{5}$ a ambos miembros de la inecuación se obtiene:

$\frac{12}{5} \geq x$

Para el Caso 2 se obtiene una solución parcial S_2, la cual debe incluir todos los números reales que cumplan con:

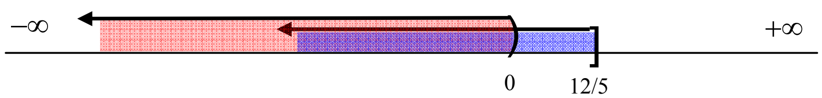
$x < 0$ y $\frac{12}{5} \geq x$

Si S_C es el conjunto solución de $x<0$ y S_D al conjunto solución de $\frac{12}{5}\geq x$ entonces la solución parcial S_2 será: $S_2=S_C\cap S_D$.

$$S_C=(-\infty,0)=\{x\in R/x<0\}$$

$$S_D=\left(-\infty,\frac{12}{5}\right]=\left\{x\in R/x\leq\frac{12}{5}\right\}$$

$$S_2=S_C\cap S_D=(-\infty,0)\cap\left(-\infty,\frac{12}{5}\right]=(-\infty,0)$$



Teniendo ya las soluciones parciales para los Casos 1 y 2, entonces podemos obtener la solución general que será denotada por S_G y que vendrá dada por la unión de S_1 y S_2, es decir:

$$S_G=S_1\cup S_2=(-\infty,0)\cup\left[\frac{12}{5},+\infty\right)$$

7) Dada la siguiente inecuación $\frac{x-2}{3}-\frac{2x^2-1}{2}\leq\frac{1}{4}-x^2$. Halle el conjunto solución y grafíquelo.

Se encuentra el m.c.m. (2, 3, 4) = 12 y se multiplica por 12 ambos miembros de la inecuación para obtener:

$$4(x-2)-6(2x^2-1)\leq 3-12x^2$$

$$4x-8-12x^2+6\leq 3-12x^2$$

Sumando 8 y $12x^2$ a ambos miembros de la inecuación se obtiene:

$$4x+6\leq 3+8$$

$$4x+6\leq 3+8$$

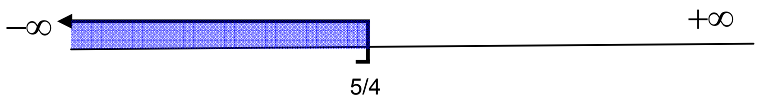
Sumando -6 a ambos miembros de la inecuación se obtiene:

$$4x\leq 5$$

Multiplicamos por $\frac{1}{4}$ a ambos miembros de la inecuación se obtiene:

$$x \leq \frac{5}{4}$$

S= $\left(-\infty, \frac{5}{4}\right] = \left\{x \in R / x \leq \frac{5}{4}\right\}$



INECUACIONES CUADRÁTICAS

Procedimiento para resolver inecuaciones cuadráticas de forma analítica:

Primer Paso: Factorizar el polinomio.

Segundo Paso: Considerar los casos necesarios para que se cumpla la inecuación.

Tercer Paso: Realice la intersección o unión de los conjuntos solución de acuerdo al caso seleccionado.

Cuarto Paso: dar la solución en forma de intervalos y graficarla.

Ejemplos

1) Dada la siguiente inecuación $x^2 + 5x + 6 > 0$. Halle el conjunto solución y grafíquelo.

Primer paso: Factorizar el polinomio dado: $x^2 + 5x + 6 = (x+3)(x+2)$, quedando una inecuación de la forma: $(x+3)(x+2) > 0$

Segundo paso: Los casos que se deben considerar son los siguientes:

Caso I: Cuando ambos binomios son positivos es decir:

$(x+3) > 0$ y $(x+2) > 0$

Caso II: Cuando ambos binomios son negativos, es decir:

$(x+3) < 0$ y $(x+2) < 0$

Solución Caso I:

Sea S_A el conjunto solución de la inecuación $(x+3)>0$ y S_B al conjunto solución de la inecuación $(x+2)>0$, la solución del Caso I viene dada por: $S_I = S_A \cap S_B$

Solución para S_A

$$x+3>0$$
$$x>-3$$
$$S_A = (-3,+\infty) = \{x \in R / x > -3\}$$

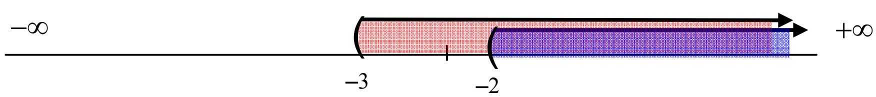
Solución para S_B

$$x+2>0$$
$$x>-2$$
$$S_B = (-2,+\infty) = \{x \in R / x > -2\}$$

La solución para S_I es entonces:

$$S_I = S_A \cap S_B = (-3,+\infty) \cap (-2,+\infty) = (-2,+\infty)$$

$$S_I = (-2,+\infty) = \{x \in R / x > -2\}$$



Solución Caso II:

Si llamamos S_C al conjunto solución de la inecuación $(x+3)<0$ y S_D al conjunto solución de la inecuación $(x+2)<0$, la solución del Caso II viene dada por: $S_{II} = S_C \cap S_D$

Solución para S_C :

$$x+3<0$$
$$x<-3$$
$$S_c = (-\infty,-3) = \{x \in R / x < -3\}$$

Solución para S_D :

$x+2<0$

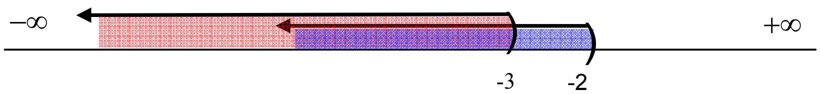
$x<-2$

$S_d=(-\infty,-2)=\{x\in R / x<-2\}$

La solución para S_{II} es entonces:

$S_{II}=S_c\cap S_d=(-\infty,-3)\cap(-\infty,-2)=(-\infty,-3)$

$S_{II}=(-\infty,-3)=\{x\in R / x<-3\}$



Solución General

La solución general será la unión de S_I y S_{II}, es decir:

$S_G=S_I\cup S_{II}=(-2,+\infty)\cup(-\infty,-3)$

El método que acaba de estudiarse, para resolver inecuaciones cuadráticas se llama **método analítico**. Existe un método alternativo, **el método gráfico**, que también se conoce como el **método del Cementerio o método de las cruces.** El procedimiento para resolver inecuaciones cuadráticas utilizando este método consiste igualmente en factorizar el polinomio cuadrático, encontrar las raíces reales y ubicarlas sobre la recta real, dando origen de esta manera a intervalos en la recta. Luego, para cada intervalo, se va evaluando cada binomio para determinar el signo de éste, es decir, se le asignará a la variable, un valor arbitrario que pertenezca a cada intervalo para conseguir el signo de cada binomio. Por último, se seleccionan los intervalos para los cuales se cumple la desigualdad.

Ejemplos:

1) Dada la siguiente inecuación $x^2+5x+6>0$, halle el conjunto solución y grafique.

Se factoriza el polinomio, $x^2+5x+6=(x+3)(x+2)$, quedando la inecuación de la forma: $(x+3)(x+2)>0$

Las raíces que anulan $(x+3)(x+2)$ son $x=-3$ y $x=-2$. Se ubican sobre la recta real (ver cuadro 1). Se le asignan valores arbitrarios a x en cada intervalo, y se determinan los signos.

	$(-\infty,-3)$	$(-3,-2)$	$(-2,+\infty)$
$(x+3)$	-	+	+
$(x+2)$	-	-	+
$(x+3)(x+2)$	+	-	+

Cuadro 1. Raíces ubicadas en la recta real.

Se aprecia en el cuadro anterior que la desigualdad se cumple para aquellos intervalos donde el producto de los dos binomios es positivo por ser la inecuación > 0, por lo tanto la solución viene dada por:

$S_G = (-\infty,-3) \cup (-2,+\infty)$

2) Dada la siguiente inecuación $\frac{(x-1)^2}{2} - \frac{(x-1)^2}{3} < \frac{8}{3}$, halle el conjunto solución y grafique.

Se desarrollan los productos notables, se multiplican por 6 ambos miembros de la inecuación y se reducen términos semejantes, obteniendo:

$x^2 - 2x - 15 < 0$

Factorizando el polinomio resultante, se tiene: $x^2 - 2x - 15 = (x-5)(x+3)$, resultando una inecuación de la forma: $(x-5)(x+3) < 0$

Las raíces de $(x-5)(x+3)$ son $x=5$ y $x=-3$, las cuales se ubican sobre la recta real.

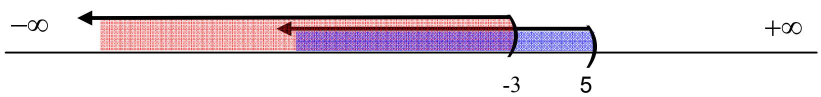
Se le asignan valores arbitrarios a *x* en cada intervalo, y se determinan los signos de la desigualdad.

	$(-\infty,-3)$	$(-3,5)$	$(5,+\infty)$
$(x+3)$	-	-	+
$(x-5)$	-	+	+
$(x-5)(x+3)$	+	-	+

Se aprecia en el cuadro anterior que la desigualdad se cumple para aquellos intervalos donde el producto de los dos binomios es negativo por lo tanto la solución viene dada por:

$S_G = (-3, 5) = \{x \in R / -3 < x < 5\}$

Gráficamente:



INECUACIONES RACIONALES

Son inecuaciones racionales, aquellas en las que tanto el numerador como el denominador son inecuaciones polinómicas cuadráticas o polinómicas de grado mayor a 2. Estos tipos de problemas pueden ser resueltos usando el **método analítico** o el **método gráfico**.

Ejemplo:

1) Dada la siguiente inecuación $\dfrac{x^2+3x-10}{x^2+x-2} < 0$ **halle el conjunto solución y grafique.**

Factorizando los polinomios dados:

$x^2 + 3x - 10 = (x+5)(x-2)$,

$x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$

Las raíces que anulan el numerador son $x = -5$ y $x = 2$, y las que anulan el denominador son $x = -2$ y $x = 1$, las cuales se ubican sobre la recta real. Se le asignan valores arbitrarios a *x* en cada intervalo, y se determinan los signos de la desigualdad.

-5 -2 1 2

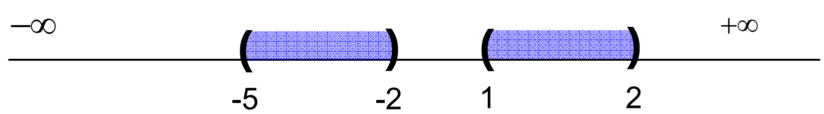
	$(-\infty, -5)$	$(-5, -2)$	$(-2, 1)$	$(1, 2)$	$(2, +\infty)$
$(x+5)$	–	+	+	+	+
$(x+2)$	–	–	+	+	+
$(x-1)$	–	–	–	+	+
$(x-2)$	–	–	–	–	+
$\dfrac{(x+5)(x-2)}{(x+2)(x-1)}$	+	–	+	–	+

http:\\www.galeon.com\damasorojas\
E-mail:damasorojas8@gmail.com,damasorojas8@galeon.com, joeldama@yahoo.com

Se observa en el cuadro anterior que la desigualdad se cumple para aquellos intervalos donde el cociente es negativo, debido a que la inecuación original < 0 (es negativa) por lo tanto la solución viene dada por:

$$S_G = (-5,-2) \cup (1,2)$$

Gráficamente:



Ejemplos Varios:

$1)\, x-5 < 2x-6$

$x-2x < -6+5 \Rightarrow (-x < -1)(-1) \Rightarrow x > 1$

$2)\, 5x-12 > 3x-4$

$5x-3x > -4+12 \Rightarrow 2x > 8 \Rightarrow x > 4$

$3)\, x-6 > 21-8x$

$x+8x > 21+6 \Rightarrow 9x > 27 \Rightarrow x > 3$

$4)\, 3x-14 < 7x-2$

$3x-7x < -2+14 \Rightarrow (-4x < 12)(-1) \Rightarrow x > -3$

$5)\, \dfrac{2x+1}{3x-1} > \dfrac{2x+5}{3x+2}$

$$\frac{2x+1}{3x-1} - \frac{2x+5}{3x+2} > 0 \Rightarrow \frac{(2x+1)(3x+2)-(3x-1)(2x+5)}{(3x-1)(3x+2)} > 0$$

$$\frac{6x^2+7x+2-6x^2-13x+5}{(3x-1)(3x+2)} > 0 \Rightarrow \frac{-6x+7}{(3x-1)(3x+2)} > 0(-1) \Rightarrow \frac{6x-7}{(3x-1)(3x+2)} < 0$$

	$-\frac{2}{3}$		$\frac{1}{3}$		$\frac{7}{6}$	
$(6x-7)$	—		—		—	+
$(3x-1)$	—		—		+	+
$(3x+2)$	—		+		+	+
$\frac{(6x-7)}{(3x-1)(3x+2)}<0$	—		+		—	+
	$-\frac{2}{3}$		$\frac{1}{3}$		$\frac{7}{6}$	

$sol.\ (-\infty, \frac{-2}{3}) \cup (\frac{7}{6}, \infty)$

INECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

Definición de valor absoluto

Sea $x \in R$. Se define el valor absoluto de *x* como:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Veamos los siguientes ejemplos

Ejemplo 1

a.- $\left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$

b.- $\left|-\frac{1}{2}\right| = -(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$. Observe como el valor absoluto a una cantidad positiva la deja igual y a una cantidad negativa le cambia el signo.

c.- Si *x*>2 entonces $|x-2| = x-2$, pues *x*-2>0 y así usamos la primera parte de la definición. Visto de otra manera a la expresión que le estamos tomando valor absoluto es de signo positivo y el valor absoluto lo deja igual.

d.- Si *x*<2 entonces $|x-2| = -(x-2)$, pues *x*-2<0 y así usamos la segunda formula de la definición. Visto de otra manera a la expresión que le estamos tomando valor absoluto es de signo negativo y el valor absoluto le cambia de signo.

Algunas propiedades del valor absoluto

Sean $x, y \in R$.

i) $|xy| = |x||y|$

ii) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} \quad \text{con} \ \ y \neq 0$

iii) $|x+y| \leq |x| + |y|$ Desigualdad triangular.

iv) $|x-y| < |x| + |y|$ Desigualdad triangular.

Demostración:

$|x-y| = |x+(-y)| < |x| + |-y| = |x| + |y| \quad \text{ya que } |-y| \geq 0 \text{ por definición del valor absoluto.}$

ECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

Si x es una incógnita en la expresión $|x-3|$, entonces no sabemos si x-3 es positivo o negativo. Ahora bien, si tenemos la ecuación: $|x-3|$=5, deberíamos considerar las dos posibilidades de signo. Es decir hay dos alternativas: x-3=5 o x-3=-5

La primera es en el caso que x -3 sea positivo, la segunda en la situación que sea negativo.
Resolviendo las dos ecuación, tenemos que x=8 o x=-2

Efectivamente estos valores de x satisfacen la ecuación: $|x-3|$=5.

Ejemplo 1.- Resolver $|x-4|=3$

Solución: Hay dos posibilidades

x-4=3 o x-4=-3.

Las soluciones de ellas son 7 y 1.
Efectivamente el lector puede comprobar que si sustituimos estos valores en la ecuación ellas satisfacen la igualdad.

Ejemplo 2.- Resolver $3|5-4x|=9$

Solución: Sabemos resolver una ecuación con valor absoluto cuando el valor absoluto está solo en el lado izquierda, así que lo llevamos a esta forma, dividiendo entre 3. De esta manera la ecuación dada es equivalente a:

$$|5-4x|=3$$

Ahora esta ecuación en valor absoluto es equivalente a

5-4x=3 ó 5-4x =-3

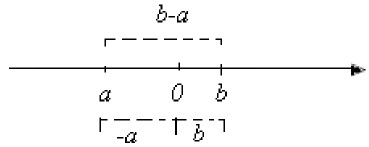
La solución de ellas son $\frac{1}{2}$ y 2.
Podemos representar el conjunto solución de nuestra ecuación $3|5-4x|=9$ a través de la notación de conjunto como: $\{\frac{1}{2},2\}$.

Recuerde que un valor absoluto siempre es mayor o igual a cero, nunca negativo.

Ejemplo 3.- Resolver $|x-5|=-2$

Solución: Esta igualdad es imposible de cumplirse. Por tanto la solución es vacía**...**

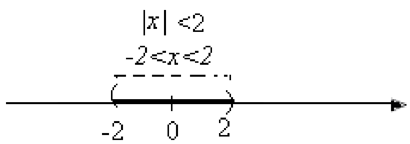
|*a*-*b* | = | *b*-*a*| representa la distancia entre *a* y *b.*



Desigualdades con valor absoluto

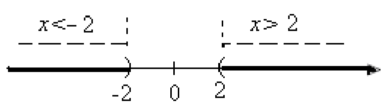
La expresión $|x|<2$ la podemos interpretar como los x cuya distancia al origen es menor que 2, estos x son todos los números que están entre -2 y 2. Así la desigualdad

$|x|<2$ es equivalente a $-2<x<2$



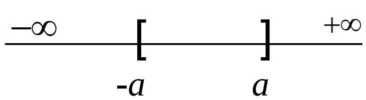
La expresión $|x|>2$ la podemos interpretar como los x cuya distancia al origen es mayor que 2, estos x son todos los números mayores que 2 y los menores que -2. Así la desigualdad

$|x|>2$ es equivalente a $x<-2$ ó $x>2$



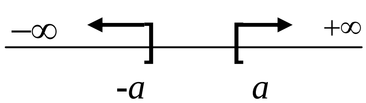
Sea $x, a \in R, \quad a \geq 0$. Se tiene entonces:

1) $|x| \leq a \quad \text{sii} \quad x \leq a \wedge x \geq -a \quad \text{ó} \quad -a \leq x \leq a$



Intervalo simétrico respecto a cero.

2) $|x| \geq a \quad \text{sii} \quad x \geq a \vee x \leq -a$



Inecuaciones de primer grado con valor absoluto

Sean $x, a, b, c \in R$. Las inecuaciones de primer grado con valor absoluto pueden presentar las siguientes formas:

http:\\www.galeon.com\damasorojas\
E-mail:damasorojas8@gmail.com,damasorojas8@galeon.com, joeldama@yahoo.com

1) $|ax+b| \le c \Rightarrow \left\{\begin{matrix} ax+b \le c \\ \text{y} \\ ax+b \ge -c \end{matrix}\right\}$ ó $\quad -c \le ax+b \le c$

Ejemplos:

a) Encuentre el conjunto de soluciones que satisface: $|5x+10| \le 15$ y grafique.

$-15 \le 5x+10 \le 15$

$-15-10 \le 5x+10-10 \le 15-10 \Rightarrow -25 \le 5x \le 5 \Rightarrow \frac{-25}{5} \le \frac{5x}{5} \le \frac{5}{5} \Rightarrow -5 \le x \le 1$

$S = [-5,1] = \{x \in R / -5 \le x \le 1\}$

$-\infty$ [ ] $+\infty$

-5 1

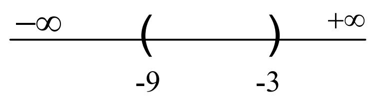
b) Encuentre el conjunto de soluciones que satisface: $\left|\frac{x}{3}+2\right| < 1$ y grafique.

$-1 < \frac{x}{3}+2 < 1$

$-3 < \frac{x}{3} < -1$

$-3\times 3 < \frac{x}{3}\times 3 < -1\times 3$

$-9 < x < -3$



$S = (-9,-3) = \{x \in R / -9 < x < -3\}$

2) $|ax+b| \ge c \Rightarrow \left\{\begin{matrix} ax+b \ge c \\ \text{ó} \\ ax+b \le -c \end{matrix}\right\}$ ó $\quad ax+b \ge c \vee ax+b \le -c$

Ejemplos:

a) Encuentre el conjunto de soluciones que satisface: $|3x+8| \ge 2$ y grafique.

$3x+8 \ge 2$

$3x \ge 2-8$

$3x \ge -6$

$x \ge \frac{-6}{3}$

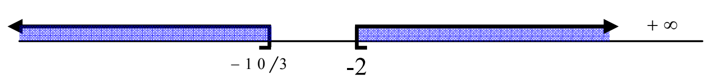
$x \ge -2$

$3x+8 \le -2$

$3x \le -2-8$

$3x \le -10$

$x \le \frac{-10}{3}$



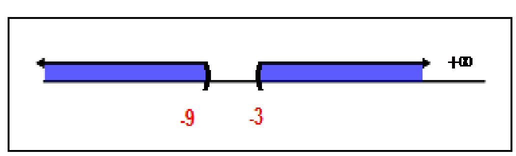
$\therefore \left(-\infty, -10/3\right] \cup [-2,+\infty)$

b) Encuentre el conjunto de soluciones que satisface: $\left|\frac{x}{3}+2\right| > 1$ y grafique.

$\frac{x}{3}+2 > 1 \Rightarrow \frac{x}{3} > -1 \Rightarrow x > -3$

$\therefore (-\infty,-9] \cup (-3,+\infty)$

$\frac{x}{3}+2 < -1 \Rightarrow \frac{x}{3} < -3 \Rightarrow x < -9$



http:\\www.galeon.com\damasorojas\
E-mail:damasorojas8@gmail.com,damasorojas8@galeon.com, joeldama@yahoo.com

Observación: Estas propiedades también aplican para $|ax+b|<c$ y $|ax+b|>c$

Ejemplo 1 Convertir las siguientes desigualdades en otra proposición equivalente sin valor absoluto.

a) $|2x-1|>1$ es equivalente a $2x-1>1$ o $2x-1<-1$.

(Note que 2*x*-1 hace las veces de *x*)

b) $|2-5x|\le 3$ Usamos la forma 2. Observe que un resultado similar a 2 se cumple en el caso de la desigualdad con $\le$.

$|2-5x|\le 3$ es equivalente a $-3\le 2-5x\le 3$.

c) $4-|1-x|\le 1$

Para usar algunas de las dos formas anteriores, debemos primero dejar el valor absoluto completamente despejado en el lado izquierdo de la desigualdad.

$4-|1-x|\le 1$ Como el 4 está sumando, pasa restando al otro lado

$-|1-x|\le -3$ Multiplicamos por $-$ ambos lados de la desigualdad, hay que recordar que la desigualdad cambia de sentido.

$|1-x|\ge 3$. Esta es la forma 2

Finalmente:

$|1-x|\ge 3$ es equivalente a $1-x\ge 3$ ó $1-x\le -3$

-x ≥ 3-1 ó -x ≤ -3-1

-x ≥ 2 ó -x ≤ -4

x≤ -2 ó x ≥ 4

A través de la notación el conjunto solución será S_t = (- ∞, -2] ⋃ [4, + ∞)

Ejercicio 2: Convertir la siguiente desigualdad en otra expresión equivalente sin valor absoluto.

$$2|x-2|-1\le 2$$

Para usar algunas de las dos formas anteriores, debemos primero dejar el valor absoluto completamente despejado en el lado izquierdo de la desigualdad.

$$2|x-2|\le 2+1$$

$$|x-2|\le \frac{3}{2}$$

$|x-2| \leq \frac{3}{2}$, que es equivalente a $-\frac{3}{2} \leq x-2 \leq \frac{3}{2}$

$$-\frac{3}{2}+2 \leq x-2 \leq \frac{3}{2}+2$$

$$\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{7}{2}$$

A través de la notación el conjunto solución será $S_t = \left[\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right]$

Para resolver completamente una desigualdad con valor absoluto, primero deberemos expresarla de una manera equivalente pero sin valor absoluto, estas últimas serán las que resolveremos con las reglas vistas anteriormente.

Ejemplo 3.- Resolver

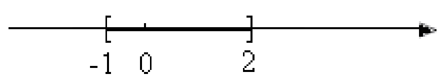
a) $|2x-1| \leq 3$ es equivalente a $-3 \leq 2x-1 \leq 3$, es decir tiene las mismas soluciones. Esta última es la que resolvemos:

$-3+1 \leq 2x \leq 3+1$ Primero restamos 1 a cada lado de la desigualdad.

$-\frac{2}{2} \leq x \leq \frac{4}{2}$ Dividimos entre 2 cada miembro de la desigualdad.

$-1 \leq x \leq 2$. Así la solución son todos los números contenidos en el

intervalo cerrado [-1,2]



b) $10-3|2x-3|<4$ Primero, se busca escribir esta desigualdad con el valor absoluto despejado del lado izquierdo. En la desigualdad $10-3|2x-3|<4$ primero pasamos el 10 restando al otro lado

$-3|2x-3|<-6$ Dividimos entre -3 ambos lados

$|2x-3|>2$

Esta desigualdad es de la forma 2. Por tanto es equivalente a

$$2x-3>2 \quad \text{ó} \quad 2x-3<-2$$

Este tipo de desigualdades dobles no pueden ser resueltas de la manera sintetizada como en el caso a). En el lado izquierdo resolvemos la primera y en el lado derecho resolvemos la segunda desigualdad, manteniendo el conectivo "o"

$2x-3>2$ ó $2x-3<-2$ Sumamos 3 a cada lado de la desigualdad

$2x>5$ ó $2x<1$ Dividimos entre 2 ambos miembros

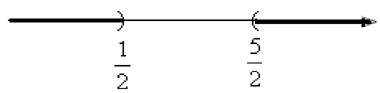
http:\\www.galeon.com\damasorojas\
E-mail:damasorojas8@gmail.com,damasorojas8@galeon.com, joeldama@yahoo.com

$x > \frac{5}{2}$ ó $x < \frac{1}{2}$

Así las soluciones de la desigualdad $10 - 3|2x - 3| < 4$ es el conjunto

$$(-\infty, \frac{1}{2}) \cup (\frac{5}{2}, \infty)$$

Representados por



El siguiente ejemplo muestra algunas desigualdades en valor absoluto cuya soluciones son **triviales: R ó** $\varnothing$ o un punto.

Ejemplo 4.- Resolver

a) $|x - 1| \leq -3$

En la primera desigualdad estamos comparando un valor absoluto, el cuál es positivo, con un número negativo. Obviamente esta relación no se cumple para ningún *x*. Así la solución es el conjunto $\varnothing$.

b) $1 - |2x - 3| < 4$;

En este caso primero despejamos el valor absoluto en el lado izquierdo, dando $|2x - 3| > -3$. Para cualquier valor de *x* tenemos que $|2x - 3| \geq 0$, esto es por la propia definición de valor absoluto y por tanto mayor que -3. Así la solución de está desigualdad son todos los número reales **R**.

c) $|x - 3| \leq 0$

Como el valor absoluto siempre da una cantidad mayor o igual a 0, la única forma que se cumpla esta proposición es cuando $|x - 3| = 0$ y esto ocurre solo cuando $x = 3$. Así que la única solución de esta desigualdad es el punto $x = 3$

Comentario: Observe que el ejemplo 3a no es de la forma 2, pues *a* tiene que ser positivo. Por la misma razón, $|2x - 3| > -3$ no es de la forma 1.

DÁMASO ROJAS
FEBRERO 2008

Nota: Ejercicios recolectados de varios autores en la red, recopilados por el autor