BLOQUE III
ANÁLISIS

Página 390

1 **Estudia las asíntotas, intervalos de crecimiento y de decrecimiento y extremos de la función $y = \dfrac{(x-1)^2}{x-2}$, y represéntala gráficamente.**

Resolución

- Asíntotas:

Vertical: $x = 2$

Posición:

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{(x-1)^2}{x-2} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{(x-1)^2}{x-2} = +\infty$$

Oblicua:

$$\begin{array}{l|l} x^2 - 2x + 1 & x - 2 \\ \hline -x^2 + 2x & x \\ \quad\quad 0 + 1 & \end{array} \qquad \frac{x^2 - 2x + 1}{x-2} = x + \frac{1}{x-2}$$

$y = x$ es una asíntota oblicua.

Posición:

— Si $x \to +\infty$ curva > asíntota

— Si $x \to -\infty$ curva < asíntota

- Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Extremos:

$y' = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2}$; $y' = 0 \to x^2 - 4x + 3 = 0$

$$\begin{cases} x = 1, & f(1) = 0 \to (1, 0) \\ x = 3, & f(3) = 4 \to (3, 4) \end{cases}$$

Signo de y':

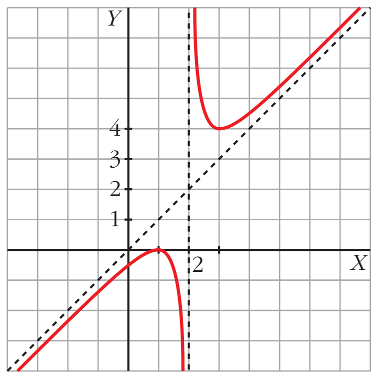
$$\begin{array}{ccccc} y' > 0 & & y' < 0 & & y' > 0 \\ \hline & 1 & & 3 & \end{array}$$

Intervalo de crecimiento $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$

Intervalo de decrecimiento $(1, 3)$

Máximo $(1, 0)$. Mínimo $(3, 4)$

- Representación:



2 **Dadas las funciones $f(x) = (x + 1)^2$; $g(x) = (x - 1)^2$; $h(x) = sen\ x$, calcula:**

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - 1}{g(x) - 1}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) + g(x) - 2}{[h(x)]^2}$

Resolución

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(x + 1)^2 - 1}{(x - 1)^2 - 1} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 + 2x}{x^2 - 2x} = \left(\dfrac{0}{0}\right)$

Factorizando el numerador y el denominador:

$$\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 2x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x(x + 2)}{x(x - 2)} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x + 2}{x - 2} = -1$$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(x + 1)^2 + (x - 1)^2 - 2}{sen^2\ x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x^2}{sen^2\ x} = \left(\dfrac{0}{0}\right)$

Aplicamos dos veces la regla de L'Hôpital:

$$\lim\limits_{x \to 0} \frac{2x^2}{sen^2\ x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{4x}{2\,sen\ x\ cos\ x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{2x}{sen\ x\ cos\ x} =$$

$$= \lim\limits_{x \to 0} \frac{2}{cos^2\ x - sen^2\ x} = \frac{2}{1} = 2$$

3 **Estudia las asíntotas y los máximos y mínimos de la función $y = \dfrac{2x^2 - 3x}{e^x}$ y represéntala gráficamente.**

Resolución

- Asíntotas:

No tiene asíntota vertical.

Horizontal:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 - 3x}{e^x} = 0 \;\rightarrow\; y = 0 \text{ es asíntota horizontal cuando } x \rightarrow +\infty.$$

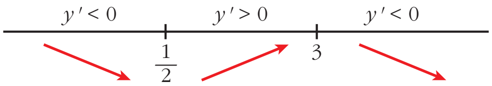
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2 - 3x}{e^x} = \frac{+\infty}{0} = +\infty$$

No tiene asíntota oblicua: $m = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 - 3x}{e^x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x - 3}{e^x} = 0$

- Máximos y mínimos:

$$y' = \frac{-2x^2 + 7x - 3}{e^x}; \quad y' = 0 \;\rightarrow\; -2x^2 + 7x - 3 = 0 \;\begin{cases} x = 3, \; f(3) = \dfrac{9}{e^3} \\[2ex] x = \dfrac{1}{2}, \; f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{-1}{e^{1/2}} \end{cases}$$

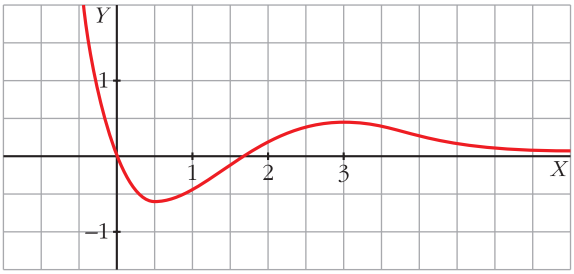
Estudiamos el signo de y':



Máximo $\left(3, \dfrac{9}{e^3}\right) \simeq (3;\, 0{,}45)$

Mínimo $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{-1}{e^{1/2}}\right) \simeq (0{,}5;\, -0{,}6)$

- Representación:



4 **Halla la ecuación de la tangente a la curva $y = e^x(x - 2)$ en su punto de inflexión.**

Resolución

- Buscamos el punto de inflexión entre las soluciones de $y'' = 0$:

$y = e^x(x - 2)$

$y' = e^x(x - 2) + e^x = e^x(x - 1) \;\rightarrow\; y'' = e^x(x - 1) + e^x = e^x \cdot x$

$y'' = 0 \;\rightarrow\; xe^x = 0 \;\rightarrow\; x = 0,\; f(0) = e^0(0 - 2) = -2 \;\rightarrow\; (0, -2)$

Comprobamos si (0, –2) es punto de inflexión:

$y''' = e^x x + e^x = e^x(x + 1) \rightarrow y'''(0) = e^0(0 + 1) \neq 0 \rightarrow$ (0, –2) es punto de inflexión.

- Pendiente de la recta tangente: $m = y'(0) = e^0(0 - 1) = -1$
- Ecuación de la recta tangente en (0, –2): $y = -2 - 1(x - 0) \rightarrow y = -2 - x$

5 **Halla el valor de a, b y c para que la curva $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ tenga un punto de inflexión en (0, 1) y la pendiente de la recta tangente a la curva en ese punto sea 2.**

Resolución

Para que tenga punto de inflexión en (0, 1), debe ser $f''(0) = 0$:

$$y' = 3x^2 + 2ax + b \rightarrow y'' = 6x + 2a$$

$$f''(0) = 0 \rightarrow 6 \cdot 0 + 2a = 0 \rightarrow a = 0$$

La función pasa por el punto (0, 1):

$$f(0) = 1 \rightarrow 0^3 + a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 1 \rightarrow c = 1$$

La pendiente de la recta tangente en $x = 0$ es 2:

$$f'(0) = 2 \rightarrow 3 \cdot 0^2 + 2a \cdot 0 + b = 2 \rightarrow b = 2$$

Por tanto: $a = 0$, $b = 2$, $c = 1 \rightarrow y = x^3 + 2x + 1$

6 **Calcula los siguientes límites:**

a) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{x - \text{sen}\, x}{\ln(\cos x)}$ **b)** $\displaystyle \lim_{x \to 0} (x + e^{2x})^{1/x}$

Resolución

a) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{x - \text{sen}\, x}{\ln(\cos x)} = \left(\frac{0}{0}\right)$ Aplicamos dos veces la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \text{sen}\, x}{\ln(\cos x)} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{-\text{tg}\, x} = \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}\, x}{-(1 + \text{tg}^2 x)} = \frac{0}{-1} = 0$$

b) $\displaystyle \lim_{x \to 0} (x + e^{2x})^{1/x}$; tomamos logaritmos:

$$\lim_{x \to 0} \ln f(x) = \lim_{x \to 0} \left[\frac{1}{x} \ln(x + e^{2x})\right] = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(x + e^{2x})}{x} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

Aplicamos la regla de L'Hôpital: $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\ln(x + e^{2x})}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 + 2e^{2x}}{x + e^{2x}} = 3$

Así:

$$\lim_{x \to 0} (x + e^{2x})^{1/x} = e^3$$

7 **Sea h una función derivable en todos sus puntos de la que se conocen los siguientes datos: $h(2) = 3$ y $h'(2) = -1$.**

Se considera la función $f(x)$ definida por:

$$f(x) = \sqrt{[h(x)]^2 + x^2 + 3}$$

Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $x = 2$.

Resolución

Hallamos el punto de tangencia:

$$x = 2;\ f(2) = \sqrt{[h(2)]^2 + 2^2 + 3} = \sqrt{9 + 4 + 3} = 4 \ \rightarrow\ P(2, 4)$$

La pendiente de la recta tangente es $m = f'(2)$

Así:

$$f'(x) = \frac{2h(x)\ h'(x) + 2x}{2\sqrt{[h(x)]^2 + x^2 + 3}} = \frac{h(x)\ h'(x) + x}{\sqrt{[h(x)]^2 + x^2 + 3}} \ \rightarrow\ f'(2) = \frac{h(2)\ h'(2) + 2}{\sqrt{[h(2)]^2 + 2^2 + 3}}$$

$$m = \frac{3(-1) + 2}{\sqrt{9 + 4 + 3}} = \frac{-1}{4}$$

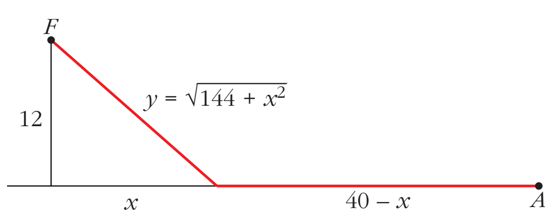
La ecuación de la recta tangente es $y = 4 - \frac{1}{4}(x - 2)$.

8 **Una fábrica está situada a 12 km de la orilla de un río y tiene que transportar sus productos a un almacén situado en la misma orilla, y a 40 km del punto del río más próximo a la fábrica.**

El transporte por carretera cuesta 8 € por kilómetro y tonelada, y en gabarra por el río cuesta 6 € por kilómetro y tonelada.

¿En qué punto del río se debe pasar la carga del camión a la gabarra para que el coste del transporte sea mínimo?

Resolución



$$\text{Coste} = 8\sqrt{144 + x^2} + 6(40 - x)$$

$$C' = \frac{8 \cdot 2x}{2\sqrt{144 + x^2}} - 6 \ \rightarrow\ C' = 0 \ \rightarrow\ 8x = 6\sqrt{144 + x^2} \ \rightarrow$$

$$\rightarrow\ x^2 = \frac{1\,296}{7} \ \rightarrow\ x \approx 13{,}6 \text{ km}$$

Comprobamos que el coste es mínimo:

$$C'' = 8 \cdot \frac{\sqrt{144 + x^2} - \dfrac{x^2}{\sqrt{144 + x^2}}}{144 + x^2} \to$$

$$\to \; C''(13{,}6) = 8 \cdot \frac{\sqrt{144 + (1\,296/7)} - \dfrac{1\,296/7}{\sqrt{144 + (1\,296/7)}}}{\sqrt{144 + (1\,296/7)}} > 0$$

Se debe pasar la carga a la gabarra a unos 13,6 km del punto del río más próximo a la fábrica.

9 **Obtén una función $f(x)$ que verifique:**

a) $f'(x) = (x - 1)\, e^x$

b) **Pasa por el punto (0, 1).**

Resolución

$$f(x) = \int (x - 1)\, e^x \, dx$$

$$\left.\begin{array}{l} (x - 1) = u \;\to\; dx = du \\ e^x\, dx = dv \;\to\; e^x = v \end{array}\right\} \; I = e^x(x - 1) - \int e^x\, dx = e^x(x - 1) - e^x + k$$

$$f(x) = e^x(x - 2) + k \;\to\; f(0) = e^0(0 - 2) + k = 1 \;\to\; -2 + k = 1 \;\to\; k = 3$$

Así: $f(x) = e^x(x - 2) + 3$

10 **Enuncia el teorema de Rolle y explica si se puede aplicar a la función $y = e^{|x|}$ en el intervalo [–1, 1].**

Resolución

El teorema de Rolle dice: si f es una función continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y tal que $f(a) = f(b)$, existe un $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

$$y = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x < 0 \\ e^x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Estudiamos la continuidad en $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} e^{-x} = 1 \\ \\ \lim\limits_{x \to 0^+} e^x = 1 \end{array}\right\} \; \lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) = e^0 = 1$$

La función es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$ porque e^{-x} y e^x lo son; también lo es en $x = 0$. Por tanto, es continua en [–1, 1].

Estudiamos su derivabilidad:

$$y' = \begin{cases} -e^{-x} & x < 0 \\ e^{x} & x > 0 \end{cases} \qquad \left.\begin{array}{l} f'(0^-) = -1 \\ f'(0^+) = 1 \end{array}\right\} f'(0^-) \neq f'(0^+)$$

No es derivable en $x = 0$.

No se puede aplicar el teorema porque $f(x)$ no es derivable en $(-1, 1)$.

11 Dada la función $f(x) = 1 + x|x|$:

a) Justifica si se puede aplicar a f el teorema de Bolzano en el intervalo $[-2, 1]$.

b) Estudia los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f y su concavidad.

Resolución

a) $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x < 0 \\ 1 + x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

f es continua si $x \neq 0$, porque está definida mediante funciones polinómicas.

Estudiamos la continuidad en $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} 1 - x^2 = 1 \\[2ex] \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} 1 + x^2 = 1 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) = 1$$

Por tanto, f es continua en $[-2, 1]$.

$$\left.\begin{array}{l} f(-2) = 1 - (-2)^2 = 1 - 4 = -3 \\ f(1) = 1 + 1 = 2 \end{array}\right\} \textit{signo de } f(-2) \neq \textit{signo de } f(1)$$

Se cumplen, por tanto, las hipótesis del teorema de Bolzano que dice: si f es una función continua en $[a, b]$ y *signo de* $f(a) \neq$ *signo de* $f(b)$, existe un $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

En este caso, existe un $c \in (2, 1)$ tal que $f(c) = 0$.

b) $f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \qquad f'(0^-) = f'(0^+)$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Si } x < 0 & -2x > 0 \\ \text{Si } x \geq 0 & 2x > 0 \end{array}\right\} \to f'(x) > 0 \text{ en todo } \mathbb{R}$$

Por tanto, f es creciente en todo $\mathbb{R}$.

$f''(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } x > 0 \end{cases} \qquad f''(0^-) \neq f''(0^+)$

f es convexa en $(-\infty, 0)$ y es cóncava en $(0, +\infty)$.

12 **Se sabe que la función:**

$$f(x) = \begin{cases} ax + bx^2 & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ -2 + \sqrt{x-1} & \text{si } 2 \le x \le 5 \end{cases}$$

es derivable en [0, 5]. ¿Cuánto valen a y b?

Comprueba si se puede aplicar el teorema de Rolle a esa función en ese intervalo.

Resolución

- f debe ser continua en $x = 2$. Por ello:

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to 2^-} ax + bx^2 = 2a + 4b \\ &\lim_{x \to 2^+} -2 + \sqrt{x-1} = -2 + 1 = -1 \end{aligned}\right\} \; 2a + 4b = -1$$

- f debe ser derivable en $x = 2$:

$$f'(x) = \begin{cases} a + 2bx & 0 \le x < 2 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} & 2 < x \le 5 \end{cases} \;\to\; a + 4b = \frac{1}{2\sqrt{2-1}} = \frac{1}{2}$$

Resolvemos ese sistema de dos ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} 2a + 4b &= -1 \\ a + 4b &= 1/2 \end{aligned}\right\} \; a = -\frac{3}{2}, \;\; b = \frac{1}{2}$$

- $f(0) = 0$; $f(5) = -2 + \sqrt{5-1} = 0$

f cumple las hipótesis del teorema de Rolle. Este dice que si f es una función continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y tal que $f(a) = f(b)$, existe un $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Buscamos el punto donde se cumple el teorema:

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{1}{2}x^2 & 0 \le x \le 2 \\ -2 + \sqrt{x-1} & 2 \le x \le 5 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{3}{2} + x & 0 \le x \le 2 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} & 2 \le x \le 5 \end{cases}$$

$$-\frac{3}{2} + x = 0 \;\to\; x = \frac{3}{2}$$

En $x = \dfrac{3}{2}$, se verifica que $f'\left(\dfrac{3}{2}\right) = 0$.

13 **Resuelve las siguientes integrales:**

a) $\displaystyle\int \frac{x+3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ **b)** $\displaystyle\int \frac{2x^3-x^2-12x-3}{x^2-x-6}\,dx$

Resolución

a) $\displaystyle\int \frac{x+3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + 3\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\sqrt{1-x^2} + 3\,arc\ sen\ x + k$

b) $\displaystyle\frac{2x^3-x^2-12x-3}{x^2-x-6} = 2x+1+\frac{x+3}{(x-3)(x+2)}$

$$\frac{x+3}{(x-3)(x+2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2} \to (x+3) =$$

$$= A(x+2) + B(x-3) \left\langle \begin{array}{l} A = 6/5 \\ B = -1/5 \end{array} \right.$$

$$\int \frac{2x^3-x^2-12x-3}{x^2-x-6}\,dx = \int\left(2x+1+\frac{6/5}{x-3}-\frac{1/5}{x+2}\right)dx =$$

$$= x^2 + x + \frac{6}{5}\,ln|x-3| - \frac{1}{5}\,ln|x+2| + k$$

14 **Calcula el área limitada por la curva $y = x^3 - 3x$ y la recta $y = x$.**

Resolución

$$\left.\begin{array}{l} y = x^3 - 3x \\ y = x \end{array}\right\}\ x^3 - 3x = x \to x^3 - 4x = 0 \to x = 0,\ x = -2,\ x = 2$$

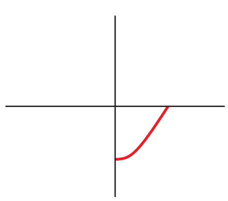
$$\text{Área} = \int_{-2}^{0}(x^3-3x-x)\,dx + \int_{0}^{2}[x-(x^3-3x)]\,dx =$$

$$= \int_{-2}^{0}(x^3-4x)\,dx + \int_{0}^{2}(4x-x^3)\,dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_{-2}^{0} + \left[2x^2 - \frac{x^4}{4}\right]_{0}^{2} = 8\ \text{u}^2$$

15 **Halla el área del recinto limitado por la función $f(x) = \dfrac{x^3-1}{x^2+1}$ y los ejes X e Y.**

Resolución



$$f(x) = \frac{x^3-1}{x^2+1}$$

Cortes con los ejes $\begin{cases} x = 0, & y = -1 \\ y = 0, & x = 1 \end{cases}$

$$A = \left| \int_0^1 \left(\frac{x^3 - 1}{x^2 + 1} \right) dx \right| = \left| \int_0^1 \left(x - \frac{x + 1}{x^2 + 1} \right) dx \right| =$$

$$= \left| \int_0^1 x\, dx - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{x^2 + 1}\, dx - \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1}\, dx \right| =$$

$$= \left| \left[\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\, ln\, (x^2 + 1) - arc\, tg\, x \right]_0^1 \right| = \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\, ln\, 2 - \frac{\pi}{4} \right| \simeq 0{,}63 \text{ u}^2$$

16 a) Dada la función $f(x) = x^x - 2^x + 1$, halla $f'(x)$.

b) Demuestra que existe algún $\alpha \in (1, 2)$ tal que $f'(\alpha) = 0$. Di qué teorema utilizas.

c) ¿Podemos asegurar que existe un $\beta \in (1, 3)$ tal que $f(\beta) = 10$? Justifica tu respuesta.

Resolución

$f(x) = x^x - 2^x + 1$

$$y = x^x \;\rightarrow\; ln\, y = x\, ln\, x \;\rightarrow\; \frac{y'}{y} = ln\, x + x\, \frac{1}{x} = 1 + ln\, x \;\rightarrow\; y' = x^x + x^x\, ln\, x$$

a) $f'(x) = x^x + x^x\, ln\, x - 2^x\, ln\, 2 = x^x\, (1 + ln\, x) - 2^x\, ln\, 2$

b) f' es una función continua en [1, 2] porque las funciones x^x, $ln\, x$ y 2^x lo son.

$f'(1) = 1(1 + ln\, 1) - 2ln\, 2 = 1 - 2ln\, 2 < 0$

$f'(2) = 2^2(1 + ln\, 2) - 2^2 ln\, 2 = 2^2 + 2^2 ln\, 2 - 2^2 ln\, 2 > 0$

f' cumple las hipótesis del teorema de Bolzano. Por ello, existe un $\alpha \in (1, 2)$ tal que $f'(\alpha) = 0$.

c) f es una función continua en [1, 3], porque las funciones x^x y 2^x lo son.

$f(1) = 1^1 - 2 + 1 = 0$

$f(3) = 3^3 - 2^3 + 1 = 20$

Según el teorema de los valores intermedios, f toma todos los valores comprendidos entre $f(1)$ y $f(3)$. Como $10 \in [0, 20]$, existirá un $\beta \in (1, 3)$ tal que $f(\beta) = 10$.

17 **La función $f(x) = \frac{1}{x}$, ¿cumple las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo [2, 4]? En caso afirmativo, calcula el punto donde se verifica el teorema.**

Resolución

$f(x) = \frac{1}{x}$ es una función continua y derivable en el intervalo [2, 4].

Según el teorema del valor medio, existe algún punto $x \in (2, 4)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(2) = \frac{1}{2} \\ f(4) = \frac{1}{4} \end{array}\right\} \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}}{4 - 2} = -\frac{1}{8} \rightarrow -\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{8} \rightarrow x^2 = 8 \rightarrow$$

$$\begin{cases} x = \sqrt{8} \in (2, 4) \rightarrow c = \sqrt{8} \\ x = -\sqrt{8} \text{ no pertenece al intervalo } (2, 4) \end{cases}$$

Se verifica el teorema en $c = \sqrt{8}$.